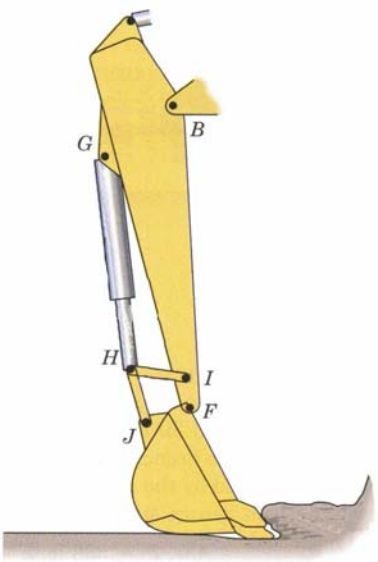
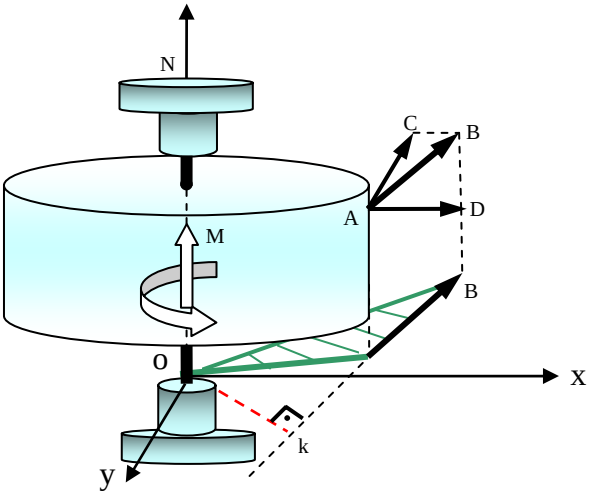
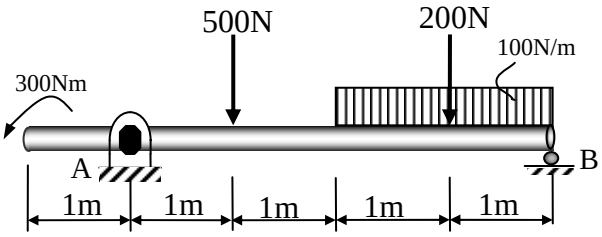
STATİK

Ders Notları







Prof. Dr. Muzaffer TOPÇU
PAÜ. Mühendislik Fakültesi
Makine Mühendisliği
DENİZLİ

İÇİNDEKİLER

1. Genel Prensipler
1.1 Giriş
1.2 Temel Kavramlar
1.3 Temel İlkeler

2. Vektörler ve Kuvvetler
2.1 Giriş
2.2 Vektörlerin Toplanması ve Çıkarılması
2.3 Vektörlerde Çarpma
2.4 Maddesel Noktanın dengesi
2.5 Çözümlü Örnekler

3. Bir Kuvvetin Bir Eksene Göre Momenti
3.1 Bir Kuvvetin Bir Eksene Göre Momenti
3.2 Varignon Teoremi
3.3 Kuvvet Çiftleri
3.4 Kesişen Düzlemlerdeki Kuvvet Çiftleri ve kuvvet çiftlerinin bileşkesi
3.5 Kuvvet Sistemlerinin Bileşkesi
3.6 Çözümlü Örnekler

4. Rijit Cisimlerin Dengesi
4.1 Giriş ve Tanımlar
4.2 Mesnetler ve Mesnet Reaksiyonları
4.3 Üç yerden puntalanmış düzlem yapılar
4.4 Uzay Yapılar
4.5 Çözümlü Örnekler

5. Ağırlık Merkezi
5.1 Giriş ve Tanım
5.2 Birleşik Alanların Ağırlık Merkezleri
5.3 Ağırlık Merkezinin İntegrasyonla Bulunması
5.4 Dönel cisimler (Pappus Guldin Teoremleri)
5.5 Çözümlü Örnekler

6. Alan ve Kütle Atalet Momentleri
6.1 Giriş ve Tanım
6.2 Paralel Eksenler Teoremi
6.3 Birleşik Cisimlerin Atalet Momentleri
6.4 Asal Atalet Momentleri ve Asal Eksenler
6.5 Kütle Atalet Momentleri
6.6 Çözümlü Örnekler

7. Kirişlerde Kesme Kuvveti ve Eğilme Momentlerinin Hesaplanması ve Diyagramları
7.1 Giriş ve Tanım
7.2 Kesme Kuvveti ve Eğilme Momenti
7.3 Kesme Kuvveti ile eğilme momenti arasındaki ilişki
7.4 Kesme Kuvveti ve Eğilme Momenti Diyagramlarının Pratik Olarak Çizilmesi
7.5 Çözümlü Örnekler

8. Kafes Sistemleri
8.1 Bir Kafes Sisteminin Tanımı
8.2 Basit Kafes Sistemleri
8.3 İzostatik ve Hiperstatik Sistemler
8.4 Kafes Sistemler için Genel Bilgiler
8.5 Kafes Sistemlerinin İzostatik Olma Şartı
8.6 Çubuk Kuvvetlerinin Tayini
8.7 Çözümlü Örnekler

9. Çerçeve ve Makinalar
9.1 Giriş ve Tanımlar

10. Sürtünme
10.1 Giriş
10.2 Kuru Sürtünme ve Kanunları
10.3 Sürtünme Kanunları
10.4 Sürtünme Katsayıları ve Sürtünme Açıları

Kaynaklar

1. **J. L. Meriam** *(Çevirenler: E. Erdoğan, M. Savcı, Tuncer Toprak),* "Statik" Birsen yayınları, 1991, İstanbul.

2. **F. B. Beer, E. R. Johnston** *(Çevirenler: F. Keskinel, T. Özbek),* "Mühendisler için Mekanik(Statik)", 1985, İstanbul.

3. **Mustafa İnan,** "Statik Ders Notlar",1990, İTÜ.

4. **Ekrem Pakdemirli,** "Örnekleri ile Mühendislik Mekaniği", 1975, Ankara.

5. **S. Timeshenko, D., H.,** (Çeviren: İlhan Kayan), "Mühendislik Mekaniği".

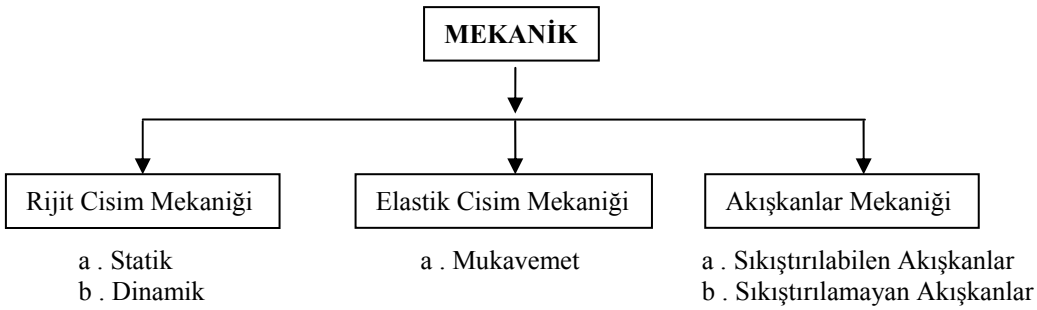
6. **E. Kıral, V. Haktanır,** "Mühendislik Mekaniği", Çukurova Üniversitesi, ADANA

BÖLÜM 1

GENEL PRENSİPLER

1.1 GİRİŞ

Mekanik, kuvvet etkisi altında cisimlerin denge ve hareket şartlarını inceleyen bir bilimdir. Mekanik üç ana bölüme ayrılır. Bu bölümler: Rijit cisim mekaniği, Elastik cisim mekaniği ve Akışkanlar mekaniğinden oluşmaktadır.



Rijit cisim mekaniği, diyagramdan da görüldüğü üzere statik ve dinamik olarak ikiye ayrılır. Statik dengede bulunan cisimlerle, dinamik hareket halindeki cisimlerle uğraşır.

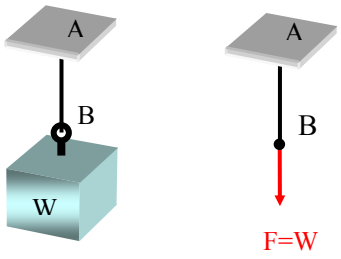
Statik, kuvvet etkisi altında cisimlerin denge şartlarını inceleyen bir bilim dalıdır. Statik'e ait ilk prensipler ve kanunlar kaldıracın bulunması ile başlamıştır. Archimedes denge kanunu ve kaldıraca ait ilk formülleri yazmıştır. Bugüne gelinceye kadar birçok bilim adamı bu konuda çalışmışlardır. Bazı bilim adamları şöyle sıralanabilir. Galile, Stevinus, Varignon, Newton, D' Alembert, Langrange ve Hamilton

Statik'te duran katı cisimler ile kuvvet arasındaki denge şartları incelenir. Yani cismin fiziksel davranışı (uzama , kısalma, eğilme, hareket, hız vb.) ile uğraşılmaz, dengelenmiş kuvvetler ve bunun geometrisi araştırılır. Gerçekte kuvvet etkisi altında cisimler bir miktar da olsa şekil değiştirirler. Bu şekil değiştirmeler, ya çok küçük olduklarından denge şartlarının incelenmesinde göz önüne alınmaz yada cismin şekil değiştirmediği farzedilir. Bir başka deyişle statik rijit cisimlerin kuvvet ve boyutları arasındaki etkileşimi inceler.

1.2 TEMEL KAVRAMLAR

1.2.1 Kuvvet

Kuvvet, tatbik edildiği cisimlerin bulundukları konumları değiştirmeye çalışan fiziksel bir etki olarak tanımlanabilir. Eğer bir cisim ip, zincir vb. ile bir yere Şekil 1.1'de görüldüğü gibi asılmış ise yer çekimi etkisi ile ipi veya zinciri, düşey doğrultuda ağırlığı kadar bir kuvvetle aşağı doğru çekmektedir. Kuvvet B noktasından etki etmektedir. Yönü aşağı ve doğrultusu AB dir.



Şekil 1.1

Şekil 1.1'de görüldüğü gibi kuvvetin tam olarak tanımlanabilmesi için;

a. Kuvvetin şiddeti (F)
b. Tatbik noktası(B)
c. Doğrultusu(AB)
d. Yönü(Aşağı)

bilinmelidir. Yukarıdaki kuvveti tanımlayan bu dört öğeye kuvvetin elemanları denir. Kuvvet gibi şiddeti, tatbik noktası, doğrultusu ve yönüyle tanımlanan büyüklüklere *Vektörel* büyüklükler denir. Kuvvet gibi ısı akışı, hız, ivme birer vektörel büyük iken, sıcaklık ve kütle *skaler* büyüklüktür.

1.2.2 Madde

Madde, uzayda yer kaplayan her şeydir. Bir cisim, kapalı bir yüzeyle çevrelenmiş bir maddedir.

1.2.3 Cisim

Tanım olarak cisim, uzayda yer kaplayan her şey cisim olarak adlandırılır. Cisimler çeşitli şekillerde (katı, sıvı, gaz vb) olabilir. Davranışları çeşitli şekillerde modellenebilir. Mekanikte cisimler davranışına göre, rijit, elastik, elasto-plastik, vizkoelastik cisim olarak adlandırılır. Statikte ise cisimler rijit olarak kabul edilir. Yani cisimler kuvvet etkisi altında hiç şekil değiştirmezler.

1.2.4 Atalet

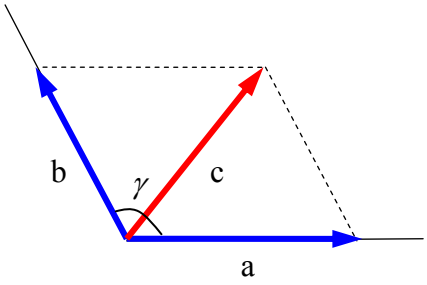
Atalet, maddenin, hareketteki değişikliğe karşı direnç gösterme özelliğidir.

1.3 TEMEL İLKELER

Elamenter mekanik, deneylerden elde edilen altı temel ilkeye dayanır.Bu ilkeler statik içinde geçerlidir.

1.3.1 Paralel Kenar Kanunu

Bir cismin herhangi bir noktasına etkiyen, iki kuvvetin etkisi, bir paralel kenarın köşegeni ile gösterilen tek bir kuvvetin etkisine denktir. Bu kuvvete *Bileşke kuvvet* denir. Aşağıdaki şekil 1.2'de görüldüğü gibi $\vec{a}$ *ve* $\vec{b}$ vektörlerinin toplamı paralel kenar kuralına göre $\vec{c}$ vektörüne eşittir.

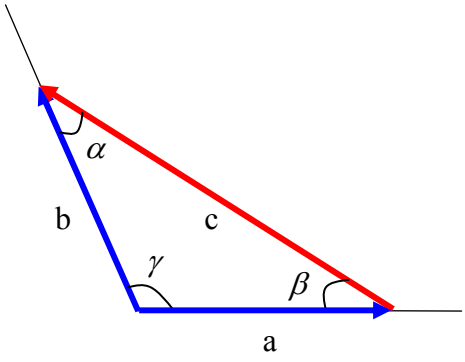


Şekil 1.2

Vektörel olarak bu toplam $c^2=a^2+b^2$ şeklinde tanımlanabilir. Eğer iki vektör arasındaki açı γ ise bileşkenin şiddeti

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} \qquad (1.3.1)$$

dir. Buna kosinüs kanunu denir. Kuvvetlerin toplanmasında Sinüs kanunu da kullanılır.



Şekil 1.3

Şekil 1.3'den görüldüğü üzere,

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{o} \tag{1.3.2}$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)} \tag{1.3.1}$$

Yukarıdaki ifade de vektörlerin (Kuvvetlerin) toplanmasında kullanılabilir.

1.3.2 Newton'un 1. Kanunu

Denge halindeki kuvvetlerin etkisinde bir maddesel nokta, ya sabit durur ya da doğrusal hareket eder.

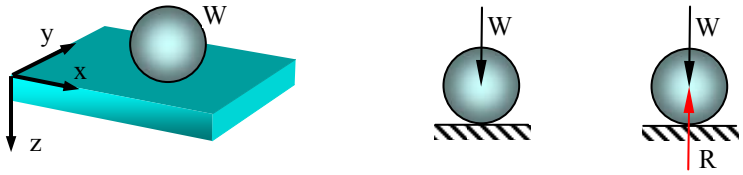
1.3.3 Newton'un 2. Kanunu

Bir maddesel noktanın ivmesi, uygulanan bileşke kuvvetin büyüklüğü ile doğru orantılıdır. İvme, kuvvet ile aynı doğrultu ve yöndedir.

$$F = ma \tag{1.3.3}$$

1.3.4 Newton'un 3. Kanunu

Temas halindeki cisimlerin temas noktasındaki etki ve tepki kuvvetleri aynı doğrultuda ve şiddette fakat zıt yönlüdür.



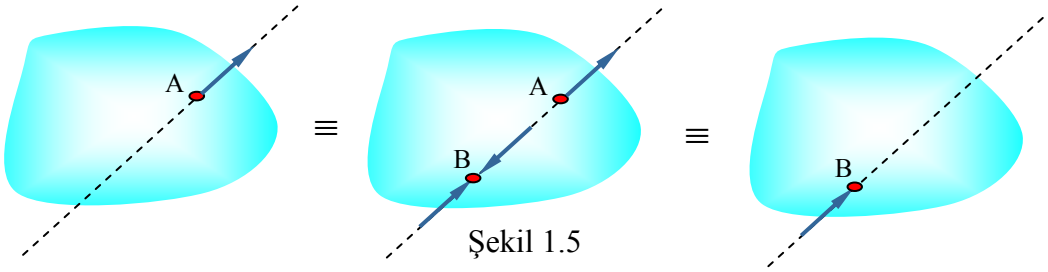
Şekil 1.4

Şekil 1.4'deki top bir düzlem üzerinde durmaktadır. Düzlemde, yani x,y doğrultularında top harekete karşı serbest olduğu halde düşey doğrultuda (z yönünde) hareket serbestliği yoktur. Bu kanuna göre düzlemin topa gösterdiği tepki kuvveti R=W dir.

Statikte, harekete karşı tamamıyla serbest olmayan cisimlerin denge şartlarını incelemek zorunda kalırız. Cismin herhangi bir doğrultu ve yöndeki serbest hareketine mani olan şeye *Bağ* denir. Dolayısıyla orada doğan kuvvete de *Bağ Kuvveti* denir. İlerleyen bölümlerde bağlar ve bağ kuvvetleri detaylı bir şekilde incelenecektir.

1.3.5 Süperpozisyon ve Kayıcılık İlkesi

Bir rijit cismin bir noktasına etkiyen bir kuvvetin yerine, aynı tesir çizgisi üzerinde, aynı şiddet, doğrultu ve yönde, fakat başka bir noktaya etkiyen bir kuvvet konulursa, rijit cismin denge ve hareketinde bir değişiklik olmaz. Bu durum şekil 1.5'de gösterilmiştir.



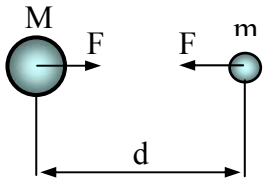
Şekil 1.5

1.3.6 Genel Çekim Kanunu

Kütleleri M ve m olan iki maddesel nokta karşılıklı olarak eşit ve zıt yönlü F ve –F kuvvetleri ile şekil 1.6'da görüldüğü gibi birbirini çeker. Cisimler arasındaki bu çekime Newton'un gravitasyon kanunu denir ve aşağıdaki formülle izah edilir.

$$F = G.\frac{M.m}{d^2} \qquad (1.3.4)$$

F : İki maddesel nokta arasındaki karşılıklı çekim kuvveti
G : Gravitasyon sabiti
d : Maddesel noktaların merkezleri arasındaki uzaklık
M, m : Maddesel noktaların kütleleri



Şekil 1.6

$G=6.673.10^{-3} cm^3/grsn^2$

Gravitasyonal kuvvetler, her cisim çifti arasında mevcuttur. Yeryüzü üzerinde, ölçülebilen tek gravitasyonal kuvvet, yerin çekiminden ileri gelen kuvvettir.(1.3.3) ve (1.3.4) nolu denklemlerin birleşiminden, düşen cismin kütlesi birbirini götürerek, g ivmesi,

$$g = \frac{GM}{d^2} \qquad (1.3.5)$$

dir.

Yeryüzüne göre g'nin değeri, ekvatorda 9.78 m/s^2, 45^0 lik enlemde 9.81 m/s^2 ve kutuplarda 9.83 m/s^2 olarak bulunmuştur. Çoğu mühendislik problemlerinde, g'nin değeri 9.81 m/s^2 olarak almak uygundur.

Bir cismin kütlesini, genel çekim kanunuyla hesaplamak mümkündür. Cismin ağırlığının değeri, W ise ve cisim g ivmesi ile düştüğüne göre (1.3.3) nolu denklemden,

$$W=mg \qquad (1.3.6)$$

bulunur.

BÖLÜM 2

VEKTÖRLER VE KUVVETLER

2.1 GİRİŞ

Çevremizdeki büyüklükler, alan, hız, hacim, kütle vb. genellikle iki şekilde adlandırılır. Skaler ve vektörel büyüklükler.

Skaler: Sadece fiziki büyüklüğü olan sıcaklık, kütle, alan gibi değerlere skaler diyoruz.

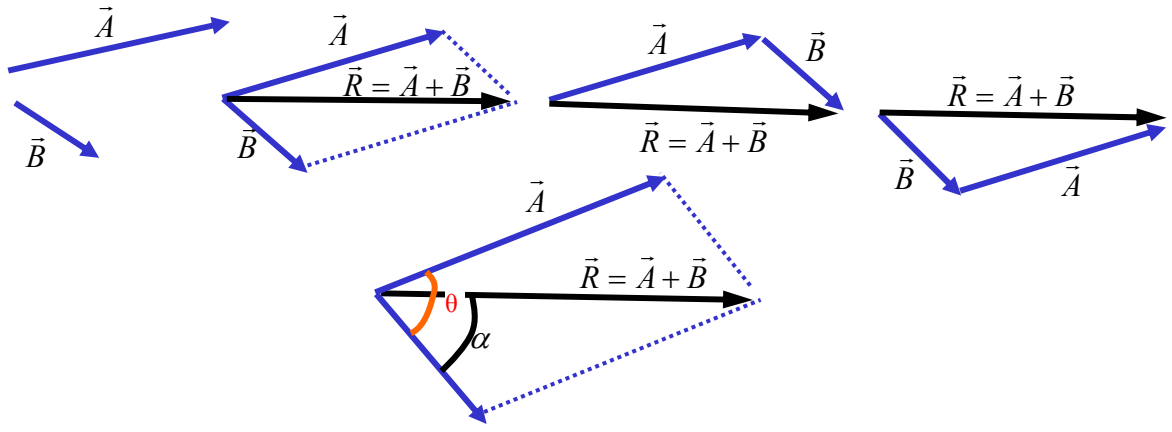
Vektör: Fiziki büyüklüğü yanında birde yönü ve doğrultusu olan hız, ivme, kuvvet ve moment gibi değerler vektör olarak adlandırılır.

Vektörel ifadeleri skalerden ayırmak için ya üzerinde bir ok($\vec{v}$) veya alt cizgi ($\underline{v}$) olarak gösterilirler. Vektörler kendi doğrultusunda kaydırılabiliyorsa bunlara *kayan vektör* başlangıç noktası sabit ise böyle vektörlerede *bağlı vektörler* denir.

Skaler büyüklükler için geçerli olan dört işlem (toplama, çıkarma, çarpma bölme) ve diğer matematiksel (türev, integral) işlemler vektörler içinde vektörlere has yöntemlerle yapılabilmektedir.

2.2 VEKTÖRLERİN TOPLANMASI VE ÇIKARILMASI

Bilinen iki vektör $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ olsun. Bu iki vektörün taplamına $\vec{R}$ diyelim. Paralel kenar kanunu vasıtasıyla şekil 2.1'de bu toplam $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ şeklinde verilir. A ve B, vektörlerin boylarını gösterdiğine göre vektörlerin toplamı geometrik olarak şekil 2.1 gibi verilebilir.



Şekil 2.1 İki vektörlerin toplanmasının geometrik gösterimi

Bu vektörlerin arasındaki açı θ ise toplamın şiddeti şu şekilde yazılabilir. Vektörün şiddeti iki cizgi arasında gösterilir.

$$|R| = \sqrt{A^2 + B^2 \pm 2ABCos(\theta)} \qquad (2.1)$$

B vektörü ile R vektörünün yaptığı açı şu şekilde yazılabilir.

$$\alpha = \arctan \frac{A\sin(\theta)}{B + A\cos(\theta)} \qquad (2.2)$$

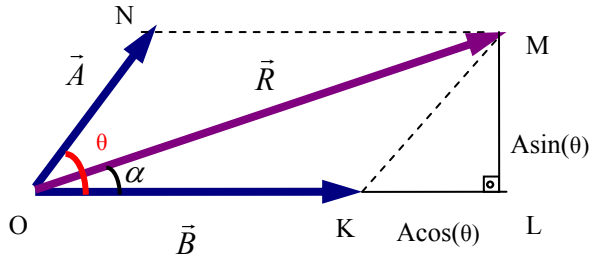
Vektörlerin toplanması için dört temel metot vardır.

a) Paralel kenar metodu
b) Üçgen metodu
c) Poligon metodu
d) Analitik metot

İlk iki metot genellikle iki vektörün toplanmasında diğer iki metot ise ikiden çok vektörün toplanması durumunda kullanılılır. Bunları sırasıyla ele alalım.

a) Paralel kenar metodu

Bir noktada kesişen iki vektör bir paralel kenara tamamlanırsa vektölerin kesim noktasından geçen köşegen o vektörlerin toplamına eşittir. Paralel kenara tamamlama ölçekli bir çizimle yapıldığında köşegenin boyu ölçülerek bileşke kuvvetinşiddeti bulunabileceği gibi cebirsel olarakta bileşke kuvvetin şiddeti ve yönü hesaplanabilir. Şekil.2.2'de geometrik çizim verilmiştir.



Şekil 2.2 Paralel kenar kuralı ile kuvvetlerin toplanması

(OML) üçgeninden bileşke kuvvet aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\bar{OM} = |R| = \left[(OK + A\cos(\theta))^2 + (A\sin(\theta)^2\right]^{1/2}$$

$$|R| = \left[A^2 + B^2 + 2ABCos(\theta)\right]^{1/2}$$

Ayrıca yukarıdaki dik (OML) üçgeninden

$$\tan(\alpha) = \frac{A\sin(\theta)}{B + A\cos(\theta)} \qquad \text{ve} \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{A\sin(\theta)}{B + A\cos(\theta)}$$

daha önce bulduğumuz formüller ile aynı ifadeleri bulduk. O halde paralel kenar kuralı ile vektörlerin toplamı ve yönü bulunabilmektedir diyebiliriz. Ayrıca yukarıdaki formüllerden şu özel durumlar söylenebilir.

1. *$\theta=0^o$ iki vektör çakışıktır.*
2. *$\theta=90^o$ iki vektör birbirine diktir*. Bu durumda şunlar yazılabilir.

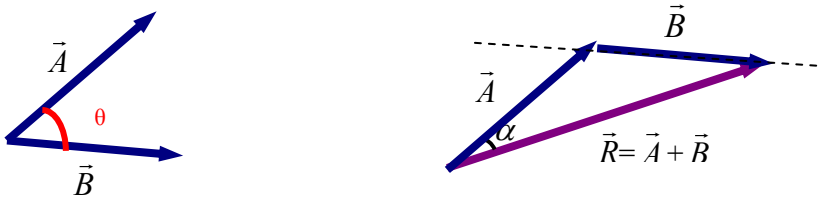
$$|R|=\left[A^2+B^2\right)\Big]^{1/2} \quad \text{ve} \quad \alpha=\tan^{-1}\frac{A}{B}$$

3. *$\theta=180^o$* ise iki vektör aynı doğrultudada olup yönleri zıttır.

$\vec{R}=\vec{A}-\vec{B}$ ise $\alpha=0^o$ ve B> A veya $\alpha=180^o$ ve B< A dir.

b) Üçgen Metodu

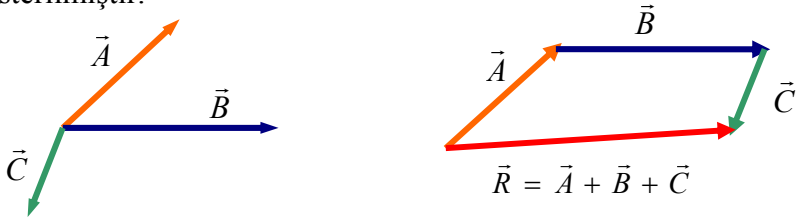
$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ verilen iki vektör ise $\vec{A}$ vektörünün ucundan(ok tarafı) $\vec{B}$ vektörüne paralel ve aynı şiddette bir vektör çizilir. $\vec{A}$ vektörünün başlangıç noktası ile $\vec{B}$ vektörünün uc noktasını birleştiren doğru $\vec{R}$ bilişke vektörünün şiddetini $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ ye doğru $\vec{R}$ nin yönü bulunur. Şekil 2.3'de üçgen metodunun uygulaması görülmektedir.



Şekil 2.3 üçgen metodunun uygulaması

c) Poligon Metodu

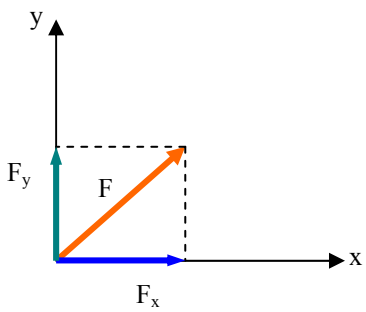
Bu metot üçgen metodun genişletilmiş halidir. İkiden fazla vektörün toplanması için kullanılan geometrik bir toplama metodudur. Bilinen üç vektör A,B,C olsun vektörlerden birini çizdikten sonra diğer vektörleri kendi yön ve doğrultusuna sadık kalarak çizilen ilk vektörün uç noktası ile diğer vektörün başlangıcı birleştirilir. Aynı işlem sonraki vektör içinde uygulanır. İlk çizilen vektörün başlangıç noktası ile son cizilen vektörün bitim noktası birleştirilirse R bileşke kuvveti; şiddet ve yön olarak bulunmuş olur. Burada işlem sırası ve vektörlerin birbirini kesmesi önemli değildir. Şekil 2.4'de üç vektör için metodun uygulanışı gösterilmiştir.



Şekil 2.4 Poligon metodu

d) Analitik Metot

Bir vektörü (birbirine dik doğrultularda) kartezyen koordinat sisteminde iki bileşene ayırmak mümkündür. Vektörün eksenlerden birisi ile yaptığı açı θ ise .Vektör sin(θ) ve cos(θ) ile çarpılarak dik koordinatlardaki izdüşümü bulunabilir. Şekil 2.5'de görüldüğü gibi vektör x ve y eksenleri yönünde bileşenlere ayrılabilir.



Şekil 2.5 Bir vektörün bileşenlere ayrılması

Şekil de bir kuvvet için yapılan bu bileşenlere ayırma birden fazla vektör içinde yapılabilir. Sonra bu bileşenler cebirsel olarak toplanırlar. Bütün vektörlerin x yönündeki bileşenleri Rx ve y yönündeki bileşenleri Ry olmak üzere bu işlemler birden çok kuvvet için yapılmış ise,

$$\sum Rx = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots\ldots\ldots\ldots + F_{nx}$$

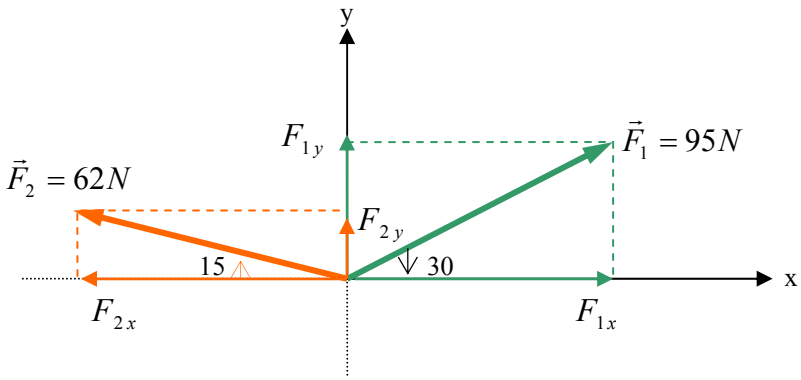
$$\sum Ry = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots\ldots\ldots\ldots + F_{ny}$$

Vektörlerin toplamı

$$|R| = \left[\sum (Rx)^2 + \sum (Ry)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{\sum Ry}{\sum Rx}$$

İfadeleri yazılabilir. Eğer R=0 ise $\sum Rx = 0$ ve $\sum Ry = 0$ olması gerektiği toplamanın özelliğinden görülmektedir.

Örnek 1:



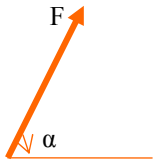
$$F_{1x} = 95\cos 30 = 82.3N \qquad F_{1y} = 95\sin 30 = 47.5N$$

$$F_{2x} = 62\cos 15 = -59.9\ \text{N} \qquad F_{2y} = 62\sin 15 = 16.1N$$

$$\sum F_x = 22.4N \qquad \sum F_Y = 63.6N$$

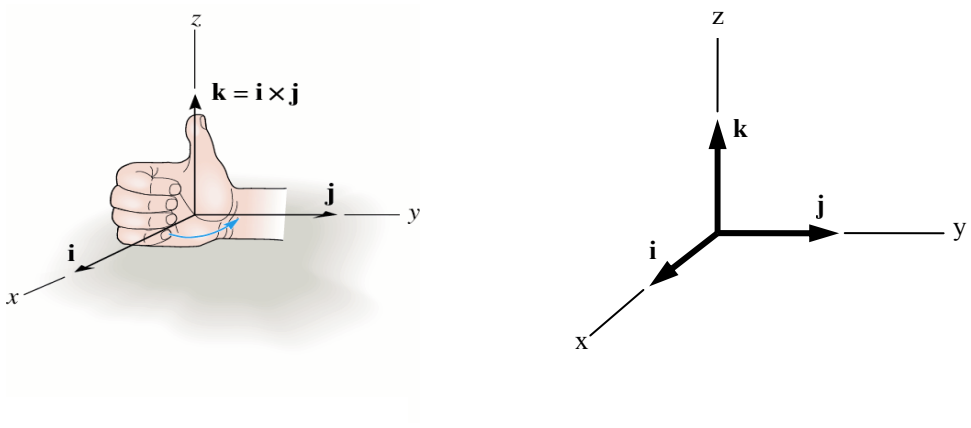
$$F = \sqrt{(22.4)^2 + (63.16)^2} = 67{,}43\ N \qquad \alpha = \tan^{-1}(63.6/22.4)$$

$$\alpha = 70{,}6^o$$



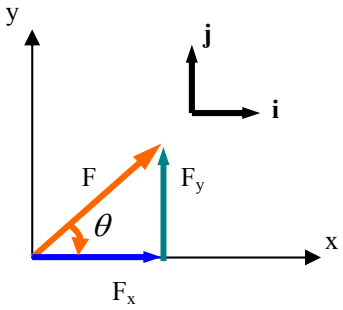
Şimdiye kadar bir düzlem içinde bulunan vektörlerden bahsettik. Uzayda yukarıdaki yöntemlerle vektörel işlemleri yapmak zordur. Uzayda vektörleri üç dik eksendeki bileşenleri ile yazmak gerekir. Bunun için birim vektörleri tanımlamak gerekmektedir. Bu vektörler sırasıyla x,y,z eksenleri boyunca i, j, k olarak bilinir.

Bu vektörlerin boyları bir birimdir. Bir skaler ile bir vektörün çarpımıda aynı yönde bir vektör vermesi tanımından, uzaydaki bir vektörü aşağıdaki gibi yazabiliriz.



Şekil 2.6 Birim vektör

Düzlemde bir vektörün gösterilimi ve birim vektörler Şekil 2.7'deki gibidir.



$$F = F_x i + F_y j$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

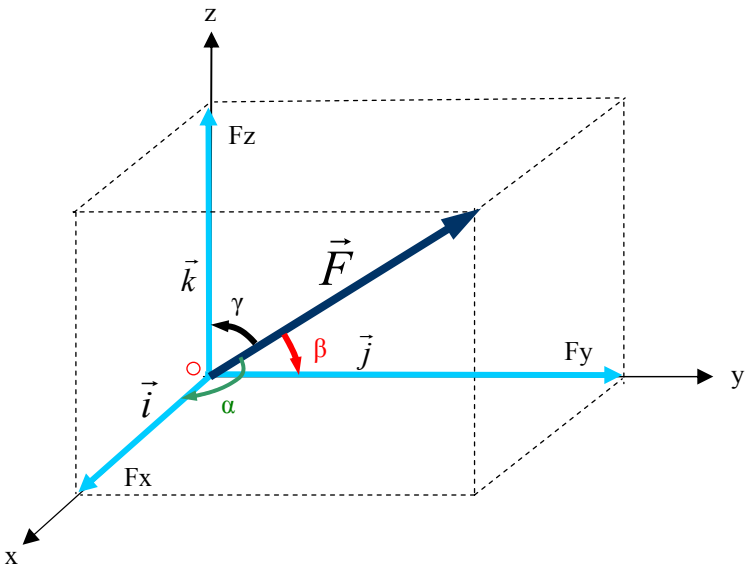
$$\tan(\theta) = \frac{F_y}{F_x}$$

Şekil 2.7

$$\vec{F} = Fx\vec{i} + Fy\vec{j} + Fz\vec{k}$$

Burada Fx , Fy, Fz skaler terimleri, $\vec{F}$ ' nün sırasıyla x,y,z eksenleri yönündeki bileşenlerinin şiddetleridir. Şekil 2.8'de uzayda bir $\vec{F}$ 'nün bileşenleri gösterilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı gibi Fx, Fy, Fz bileşenleri $\vec{F}$ 'nün üç noktasının koordinatlarıdır.
O halde vektörün başlangıç noktası orijin ve bitim noktasının koordinatları (x_2, y_2, z_2) olarak verilirse,

$\vec{F} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ ve $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ olarak yazmak mümkündür.



Şekil 2.8 vektörün bileşenleri ve birim vektörler

Sırasıyla x, y, z eksenleri ile vektörün yaptığı açılar **(α), (β), (γ)** ise,

2.2.1 Doğrultman Kosinüsleri: Cos(α), Cos(β), Cos(γ) dır. Doğrultman kosinüsleri arasında şu bağıntı vardır.

$$\text{Cos}^2(\alpha)+ \text{Cos}^2(\beta)+ \text{Cos}^2(\gamma) =1$$

Doğrultman kosinüslerini vektörlerin bileşenleri ve şiddetlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\text{Cos}(\alpha)=\frac{F_x}{|F|},\ \text{Cos}(\beta)=\frac{F_y}{|F|},\ \text{Cos}(\gamma)=\frac{F_z}{|F|}$$

A vektörü doğrultusundaki (boyunca) birim vektör λ_A ise şu şekilde tanımlanabilir.

$$\lambda_A=\frac{\vec{F}}{F}=\frac{F_x}{|F|}\text{i}+\frac{F_y}{|F|}\text{j}+\frac{F_z}{|F|}\text{k}= \text{Cos}(\alpha)\ \text{i} + \text{Cos}(\beta)\ \text{j} + \text{Cos}(\gamma)\ \text{k}$$

$$\vec{F} = \text{F}\lambda_A= \text{FCos}(\alpha)\ \text{i} +\text{FCos}(\beta)\ \text{j} +\text{FCos}(\gamma)\ \text{k}$$

Eğer bilinen vektörler $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$,.....$\mathbf{F_n}$ ise bu vektörlerin toplamı $\vec{F}_R$ vektörü şu şekilde yazılabilir.

$$\vec{F}_R=\sum\vec{F}=\sum F_x\vec{i}+\sum F_y\vec{j}+\sum F_z\vec{k}$$

2.2.2 Uzayda İki Nokta Arasında Tanımlanmış Kuvvetler

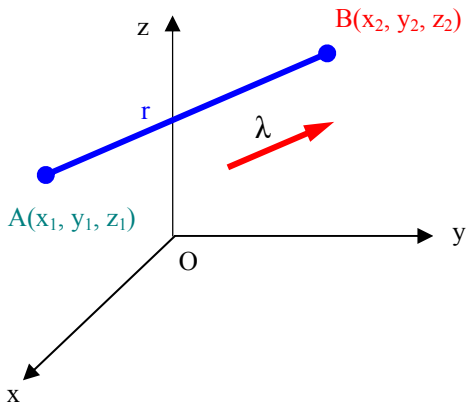
Eğer koordinat eksenleri vektörün başlangıcında geçmiyor ve başlangıç noktası A(x_1, y_1, z_1) ve bitim noktası B(x_2, y_2, z_2) olarak verilmiş bir $\vec{F}$ vektörü şöyle yazılabilir. Şekil 2.9'da böyle bir vektörü göstermektedir.

$$\vec{r}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k} \quad \text{veya}$$

$$\vec{r}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$

$$|r|=\sqrt{(\text{x}_2-\text{x}_1)^2+(\text{y}_2-\text{y}_1)^2+(\text{z}_2-\text{z}_1)^2}$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 2.9 İki nokta arasında tanımlanan kuvvetler

A-B doğrusu üzerindeki birim vektör şu şekilde tanımlanabilir.

$$\lambda = \frac{\vec{r}}{|r|}$$

A-B boyunca meydana gelen vektör ve değeri, A-B nin koordinatlarından tanımlanabilir.

$$\vec{F} = F\frac{\vec{r}}{r} = F\,\lambda$$

2.3 VEKTÖRLERDE ÇARPMA

Vektörlerde çarpma işlemi denilince aşağıdaki dört tip çarpma akla gelir.

a) Bir skalerin bir vektörle çarpımı

b) İki vektörün skaler çarpımı

c) İki vektörün vektörel çarpımı

d) ikiden fazla vektörün skaler ve vektörel çarpımı

Bunları sırasıyla ele alalım.

a) Bir skalerin bir vektörle çarpımı

Skaler sayı a olsun vektörde F ise skaler çarpım,

$$\vec{S} = a\,\vec{F}$$

olarak yazılabilir. Burada $\vec{S}$ vektörünün şiddeti, a skaleri ile $\vec{F}$ vektörünün şiddetinin çarpımına eşittir. S'nin doğrultusu F ile aynı olup,

a>0 ise $\vec{S}$ vektörü $\vec{F}$ vektörü ile aynı yönde

a<0 ise $\vec{S}$ vektörü $\vec{F}$ vektörünün tersi yönde

a=0 ise $\vec{S}$ vektörü bir noktaya dönüşür

Örnek 2:

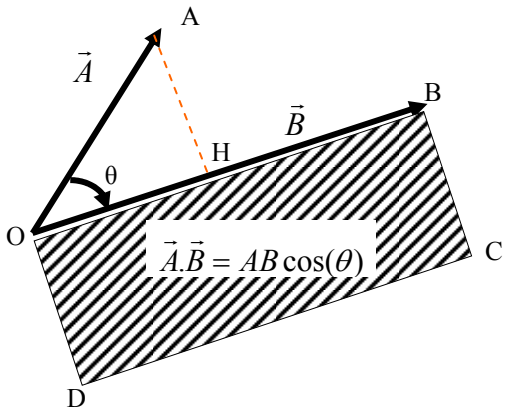
$\vec{F} = 5\vec{i} - 7\vec{j} + 15\vec{k}$ *olarak verildiğine göre* $2\vec{F}$ *ve* $(-4\vec{F})$ *nedir?*

Çözüm:

$2\vec{F} = 10\vec{i} - 14\vec{j} + 30\vec{k}$ ve $-4\vec{F} = -20i + 28\vec{j} - 60\vec{k}$ 'dir.

b) İki vektörün skaler çarpımı

Verilen iki vektör $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ olsun. Bu iki vektörün skaler çarpımı;



OA= $\vec{A}$
OB= $\vec{B}$
OH=OD=Acosθ

Şekil 2.10 Skaler çarpımın geometrik anlamı

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

ifadesiyle tanımlanabilir. Yukarıdaki ifade $\vec{A}$ skaler çarpım $\vec{B}$ diye okunur. AB skalerdir ve Şekil 2.10'daki taralı dikdörtgenin alanını verir. Eğer iki vektör birbirine dik ise $\boldsymbol{\theta=90^o}$ ve

cos90=0 olduğu için skaler çarpım sıfır olur. Diğer bir ifade ile skaler çarpımları sıfır olan iki vektör birbirine diktir**. *θ=0^o , cos0=1*** olur ve skaler çarpım, bu iki vektörün şiddetleri çarpımına eşittir. B birim vektör ise, skaler çarpım A nın B doğrultusundaki bileşeninin şiddetini verdiği Şekil 2.10'dan görülmektedir (OH=Acos θ)

Yukarıdaki açıklamalardan i,j,k birim vektörlerinin skaler çarpımı şöyle yazılabir.

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1 \quad \text{ve} \quad \vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$$

Birim vektörler cinsinden verilmiş iki vektör.

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \quad \text{ve} \quad \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

olsun bu iki vektörün skaler çarpımı;

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \text{ olur.}$$

Skaler çarpım (.) ile gösterilmektedir.Bir vektörün kendisiyle çarpımı:

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad \text{veya} \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \text{ 'dır.}$$

Buradan şöyle diyebiliriz. Bir vektörün şiddeti kendisiyle skaler çarpımının kareköküdür.

Örnek 3:

$\vec{A} = 7\vec{i} - 8\vec{j} + 3\vec{k}$ vektörünün $\vec{B} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$ vektörü yönündeki bileşenini bulunuz.

$\vec{B} = B.\vec{b}$ şeklinde yazarsak b birim vektörünü hesaplayabiliriz.

B=(4+36+9)$^{(1/2)}$=7 ise, $\vec{b} = \frac{1}{7}(2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k})$'dir.

$\vec{A}.\vec{b} = \frac{1}{7}((7).(2)+(-6).(-8)+(3)(3)) = \frac{71}{7} = 10.15$ bulunur

c) İki vektörün vektörel çarpımı

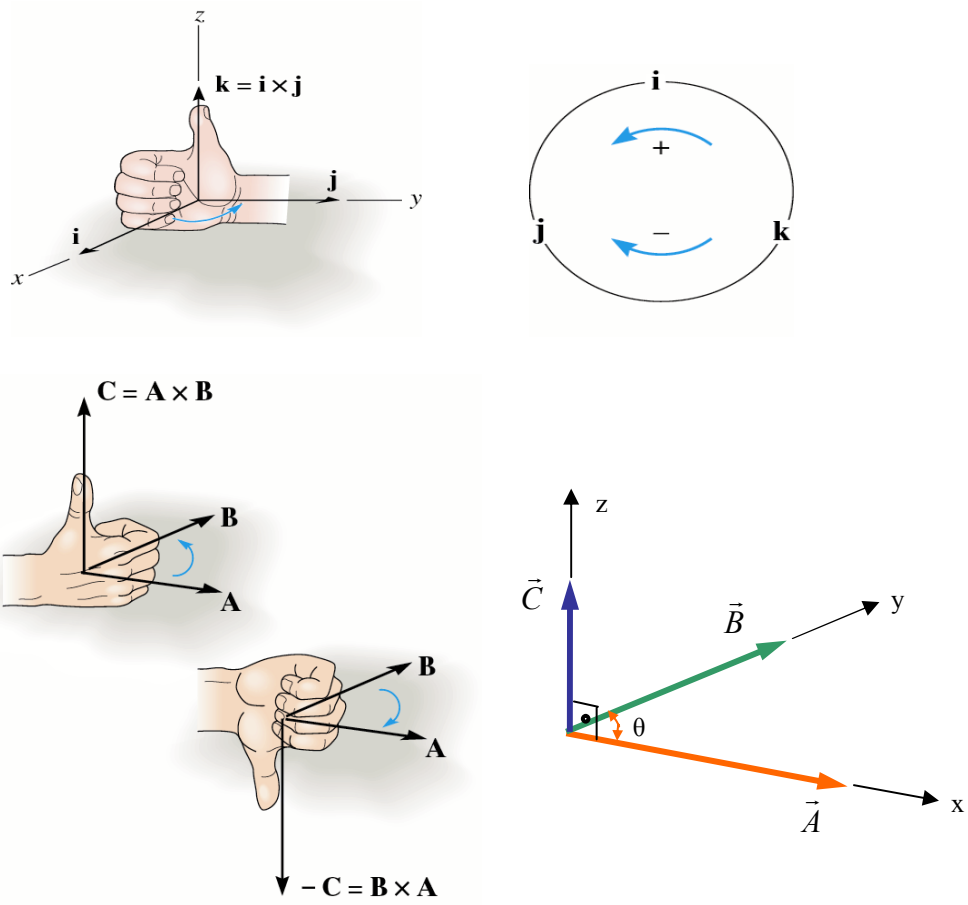
Bilinen iki vektör , $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ ve $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$ olsun, bu iki vektörün vektörel çarpımı;

$$\vec{C} = \vec{A}x\vec{B}$$

olarak yazılır ve A vektörel çarpım B diye okunur. Burada çarpım yine bir vektördür. C vektörünün şiddeti;

$$C=A.B.Sin\theta\text{' dır.}$$

ve A-B vektörlerine diktir. Yönü sağ ***el kuralı***na göre bulunur. Şekil 2.11' de sağ el kuralı ve iki vektörün vektörel çarpımından elde edilen C vektörü ve yönü görülmektedir.



Şekil 2.11 Sağ El Kuralı, Vektörel çarpım ve C vektörünün yönü

Burada sırasıyla x,y,z yönlerindeki birim vektörler i,j,k ise bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$\vec{i}x\vec{i} = \vec{j}x\vec{j} = \vec{k}x\vec{k} = 0 \quad \text{ve}$$

$$\vec{i}x\vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{k}xi = \vec{j}, \quad \vec{j}x\vec{k} = i \quad \text{tersi ise}$$

$$\vec{j}x\vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{i}x\vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{k}x\vec{j} = -i \text{ 'dir.}$$

Bu çarpımdan da vektörün yönü görülmektedir. Ayrıca Şekil 2.11'den vektörel çarpmada

$\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}$ olduğundan çarpma sırası önemlidir. Paralel iki vektörün çarpımı sıfırdır. Bir başka ifade ile çarpımları sıfır olan iki vektörün, vektörel çarpımı sıfır ise bu iki vektör paraleldir. *Geometrik olarak vektörel çarpımın manası; çarpılan iki vektörün meydana getirdikleri paralel kenarın alanını vermektedir. İki vektör birim vektörler cinsinden verilmiş ise bu iki vektörün vektörel çarpımı aşağıda verilmiştir.*

$$\vec{C} = \vec{A}x\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})x(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

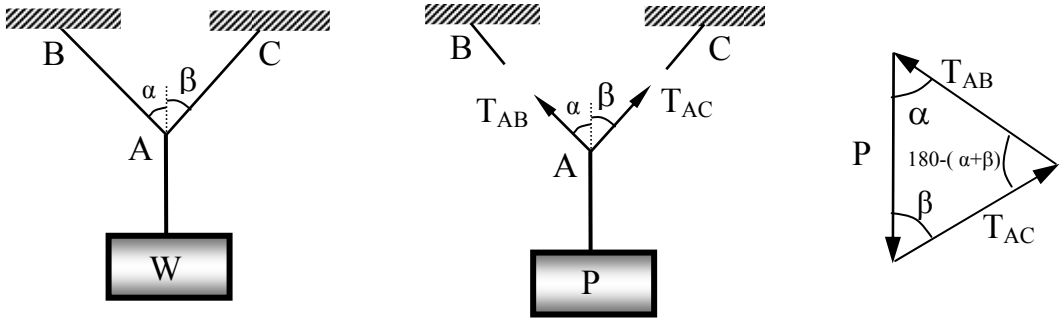
Bu çarpımın sonucu aşağıdaki matrisin determinatının açılımıdır.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$$

2.4 MADDESEL NOKTANIN DENGESİ

Newton'un birinci kanuna göre bir maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvvet 0 ise maddesel nokta hareketsiz kalır. Eğer başlangıçta bir hızı varsa sabit hızla doğrusal hareket yapar. Bu kanuna göre uzayda bir noktada kesişen kuvvetlerin statik dengesi için bileşke kuvvet R = 0 olmalıdır. Bileşenler halinde yazılacak olursa $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$, $\Sigma F_z=0$ şartı bulunmalıdır. Bunlara denge denklemi adı verilir. Eğer kuvvetler çokgeni çizilmiş ise bileşke kuvvetin sıfır olma şartı yerine getirilebilmesi için çokgenin başlangıç noktasının tekrar kapanması gerekir. Düzlemde denge denklemleri iki tanedir. Kuvvet dengesinde ayrıca momentlerin dengesi için de bir denklem daha yazmak gerekir.

$$\Sigma F_x=0 \ , \ \Sigma F_y=0$$



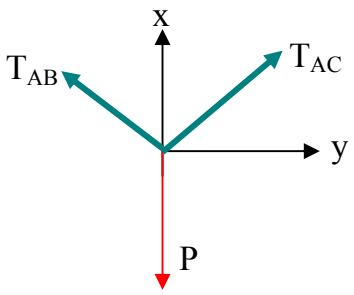
a) Durum diyagramı **b**) Serbest Cisim Diyagramı **c**) Kuvvet Diyagramı

Şekil 2.12

Şekil 2.12'de görüldüğü gibi problemin fiziksel şartlarının gösterilmesi ***durum diyagramı***, cisim izole edilir ve etki eden kuvvetler gösterilirse buna ***serbest cisim*** diyagramı denir. Problem denge denklemleri yardımıyla çözülebilir. Çözümde kullanılan yalnızca kuvvetlerin gösterildiği diyagrama ***kuvvetler diyagramı*** denir. Meselâ kuvvetler üçgeninde kuvvetleri belirleyen sinüs denklemleri;

$$\frac{T_{AB}}{\sin\beta} = \frac{T_{Ac}}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin(180-(\alpha+\beta))}$$ şeklinde yazılabilir.

Denge denklemleri ile çözmek istersek;

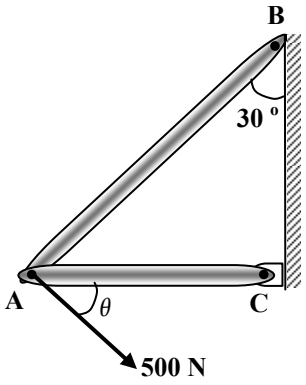


$\Sigma F_x=0$

$\Sigma F_y=0$

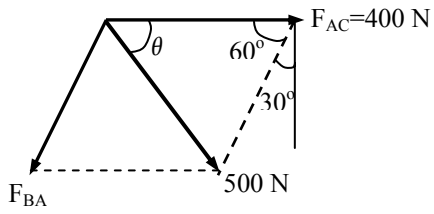
2.5 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

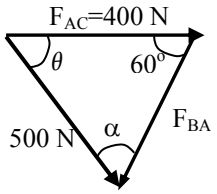
Problem 1:



Şekildeki çerçeveye 500 N'luk kuvvet etki etmektedir. F_{AC}=400 N ise F_{BA}'yı hesaplayınız. Ayrıca θ açısını bulunuz.

Çözüm:





$$\frac{400}{Sin\alpha} = \frac{500}{Sin60}$$

$$Sin\alpha = \frac{400}{500}(Sin60)$$

$$\alpha = 43{,}9^{o}$$

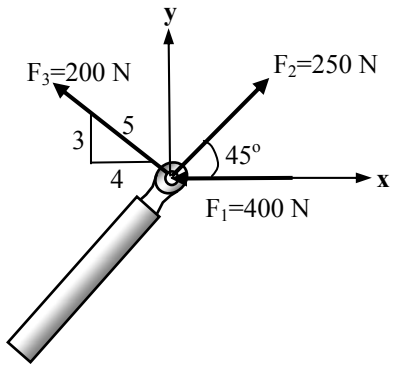
$$\theta = 180 - 60 - 43{,}9$$

$$\theta = 76{,}1^{0}$$

$$\frac{400}{Sin\alpha} = \frac{F_{BA}}{Sin\theta}$$

$$F_{BA} = 560\,N$$

Problem 2:



Bileşke kuvveti ve x ekseni ile yaptığı açıyı bulunuz.

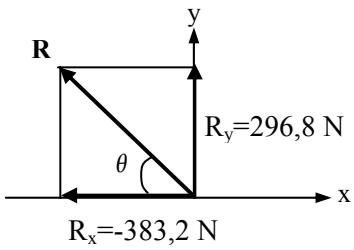
Çözüm:

$$R_x = \sum F_x \Rightarrow R_x = -400 + 250.Cos\,45 - 200.\frac{4}{5}$$

$$R_x = -383{,}2\ N \leftarrow$$

$$R_y = \sum F_y \Rightarrow R_y = 250.Sin\,45 + 200.\frac{3}{5}$$

$$R_y = 296{,}8\ N \uparrow$$

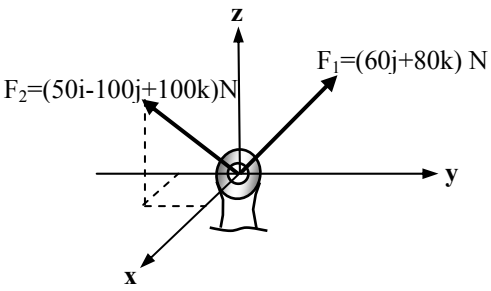


$$R = \sqrt{(-383{,}2)^2 + 296{,}8^2}$$

$$R = 485\ N$$

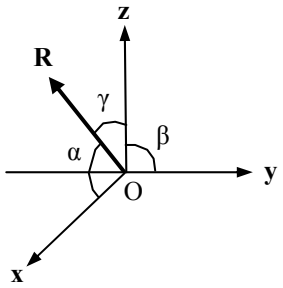
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{296{,}8}{383{,}2}\right) = 37{,}8^o$$

Problem 3:



F_1 ve F_2 kuvvetlerinin bileşkesinin şiddetini ve x,y,z eksenleri ile yaptığı açılar hesaplayınız.

Çözüm:



$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\vec{R} = (60j + 80k) + (50i - 100j + 100k)$$

$$\vec{R} = 50i - 40j + 180k$$

$$|R| = \sqrt{50^2 + (-40)^2 + 180^2}$$

$$|R| = 191\ N$$

$$\lambda = \frac{R}{|R|} = \frac{50i - 40j + 180k}{191}$$

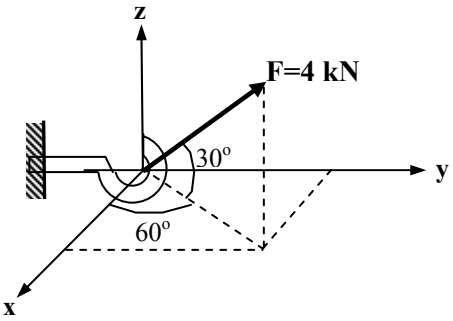
$$\lambda = 0{,}2617i - 0{,}2094j + 0{,}9422k$$

$$\text{Cos}(\alpha) = \frac{F_x}{|F|},\ \text{Cos}(\beta) = \frac{F_y}{|F|},\ \text{Cos}(\gamma) = \frac{F_z}{|F|}$$

Cosα=0,2617 Cosβ=-0,2094 Cosγ=0,9422

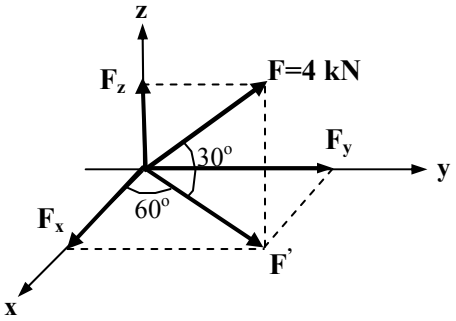
α=74,8° β= 102° γ=19,6°

Problem 4:



F kuvvetinin xy düzlemi ile yaptığı açı 30^o ise F kuvvetinin bileşenlerini bulunuz.

Çözüm:



$$F' = 4.Cos30 = 3{,}46\ kN$$

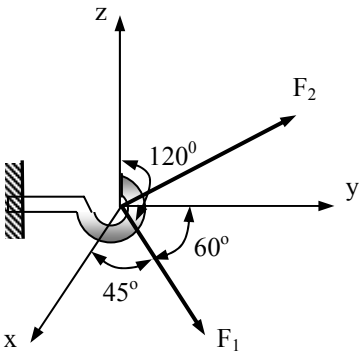
$$F_z = 4.Sin30 = 2\ kN$$

$$F_x = F'.Cos60 = 3{,}46.Cos60 = 1{,}73\ kN$$

$$F_y = F'.Sin60 = 3{,}46.Sin60 = 3\ kN$$

$$\vec{F} = (1{,}73\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 2\vec{k})\ kN$$

Problem 5:



Bir kancaya F_1=300 N ve F_2=700 N kuvvetleri etki etmektedir. Bileşkenin y ekseni üzerinde 800 N olabilmesi için F_2 kuvvetinin bileşenlerini ve x, y, z eksenleri ile yaptığı açıları hesaplayınız.

Çözüm:

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = F_1\cos\alpha_i + F_1\cos\beta_j + F_1\cos\beta_k$$

$$= 300\cos 45i + 300\cos 60\,j + 300\cos 120k$$

$$= 212i + 150\,j - 150k$$

$$\vec{F}_2 = (F_{2x})\vec{i} + (F_{2y})\vec{j} + (F_{2z})\vec{k}$$

$$\vec{R} = R_{yj} = 800_j$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$800\,j = (212 + F_{2x})\vec{i} + (150 + F_{2y})\vec{j} + (-150 + F_{2z})\vec{k}$$

$$R_x = 212i + F_2x = 0$$

$$F_2x = -212N$$

$$F_2z = 150N$$

$$800 = 150 + F_{2y}$$

$$F_{2y} = 650N$$

$$F_{2x} = F_2\cos\alpha_2$$

$$-212 = 700\cos\alpha_2$$

$$\alpha_2 = 108^0$$

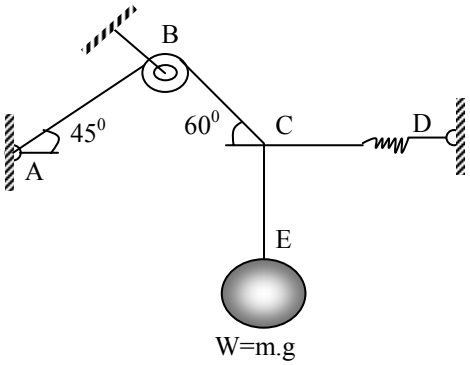
$$650 = 700\cos\beta_2$$

$$\beta_2 = 21{,}8^0$$

$$150 = 700\cos\gamma_2$$

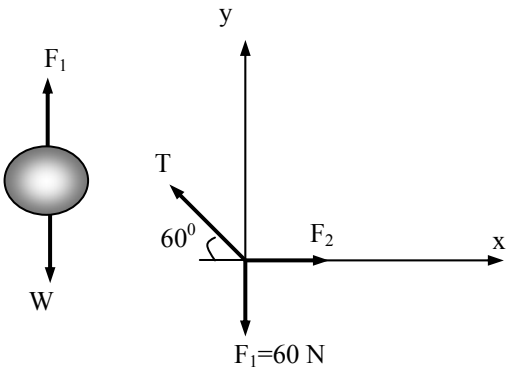
$$\gamma_2 = 77{,}6^0 \quad veya \quad \lambda = \frac{F_2}{|F|} = \frac{-212i + 650\,j + 150k}{\sqrt{(-212)^2 + 650^2 + 150^2}} = -0{,}302i + 0{,}928\,j + 0{,}214k$$

Problem 6:



Verilen sistemde BC kablo kuvveti ile CD yay kuvvetini hesaplayınız. (W=60 N)

Çözüm:



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-T.\cos 60 + F_2 = 0$$

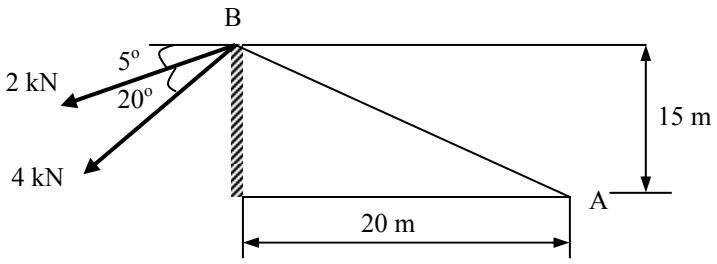
$$T.\sin 60 - F_1 = 0$$

$$T = \frac{60}{\sin 60} = 69{,}28$$

$$F_2 = T.\cos 60$$

$$F_2 = 34{,}64\,N$$

Problem 7:



Kuvvetleri bilinen iki kablo B noktasına bağlanmıştır. Üçüncü bir AB kablosu bağ teli olarak kullanılmaktadır. Bu tel A dan B' ye bağlanmıştır. AB'deki kuvvet ne olmalıdır ki üç kablonun bileşkesi düşey olsun.

Çözüm:

$$\overrightarrow{BA} = 20\vec{i} - 15\vec{j}$$

$$[BA] = \sqrt{(20)^2 + (-15)^2} = 25$$

$$\vec{F}_{BA} = F_{BA}.\frac{20}{25} - F_{BA}\frac{15}{25}$$

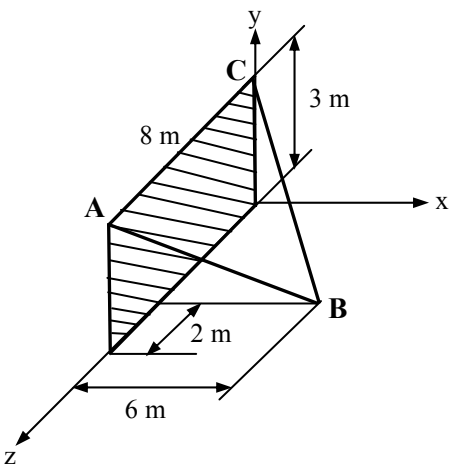
$$\sum R_x = 0$$

$$-2.Cos5 - 4.Cos25 + F_{BA}\frac{20}{25} = 0$$

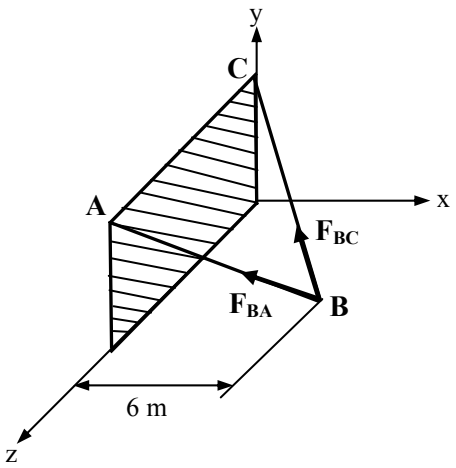
$$F_{BA} = 7\,kN$$

Problem 8:

AB kablosundaki kuvvet 350 N, BC kablosundaki kuvvet 450 N dur. Kablodan B noktasına gelen kuvvetlerin bileşkesini bulunuz.



Çözüm:



A(0,3,8) B(6,0,6) C(0,3,0)

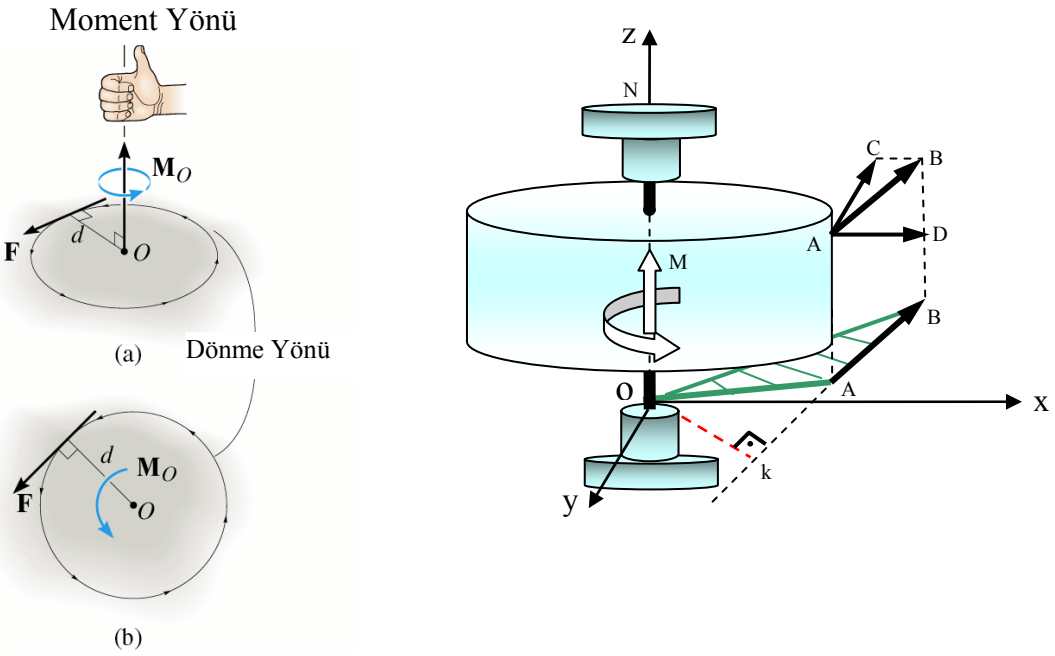
$$\overrightarrow{BA} = -6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\overrightarrow{BC} = -6\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$$
$$|BA| = \sqrt{36+9+4} = 7$$
$$|BC| = \sqrt{36+9+36} = 9$$

$$\overrightarrow{F_{BA}} = \frac{350}{7}(-6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$$
$$\overrightarrow{F_{BC}} = \frac{450}{9}(-6\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k})$$
$$\overrightarrow{F_{BA}} = -300\vec{i} + 150\vec{j} + 100\vec{k})$$
$$\overrightarrow{F_{BC}} = -300\vec{i} + 150\vec{j} - 300\vec{k}$$
$$\overrightarrow{R_B} = \overrightarrow{F_{BC}} + \overrightarrow{F_{BA}}$$
$$\overrightarrow{R_B} = -600\vec{i} + 300\vec{j} - 200\vec{k}$$

BÖLÜM 3
BİR KUVVETİN BİR EKSENE GÖRE MOMENTİ

3.1 BİR KUVVETİN BİR EKSENE GÖRE MOMENTİ

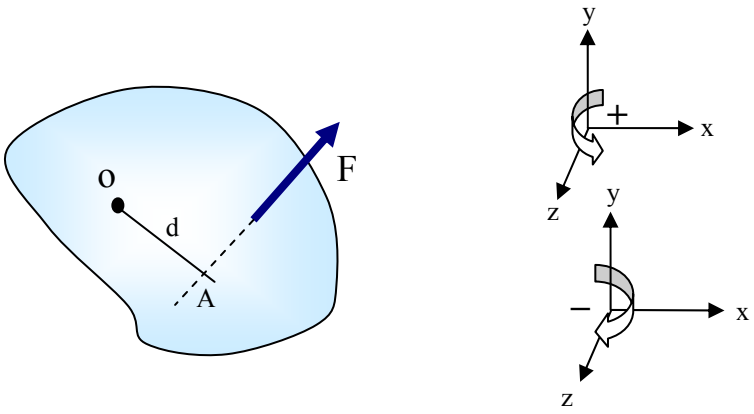
Bir kuvvetin tatbik edildiği cismi sabit bir eksen etrafında döndürme eğilimine kuvvetin o eksene göre momenti denir.



Şekil 3.1 Bir kuvvetin momenti ve sağ el kuralı

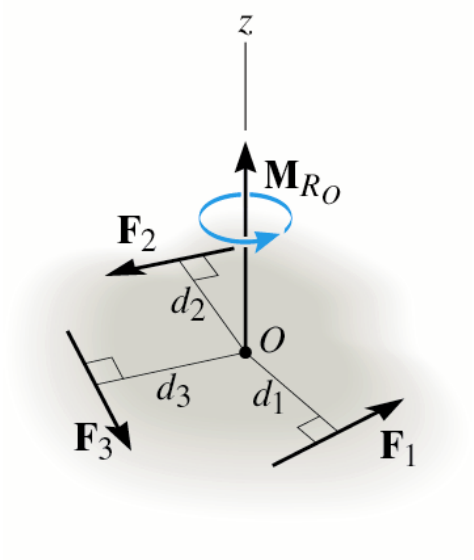
Momentin işaretini belirtmek için ON eksenin okla gösterilen yönde (+) olduğunu kabul edip sağ el kuralına göre momentin yönü belirtilebilir. Sağ elin parmakları kuvvetin çevirme yönündeyken başparmak kuvvetin yönünü gösterir. M momenti şekilde görüldüğü gibi bir vektörle gösterebilir. M moment vektörü vektör kurallarına uyan ve tesir çizgisi moment ekseni olan bir kayan vektör olarak düşünülebilir. Çünkü dik düzlem olarak başka bir düzlem alınsaydı yine aynı şiddette ve yine aynı döndürme yönünde bir vektör bulunacaktı. Momentin birimi Newton metre (Nm) dir. Bütün kuvvetlerin aynı düzlemde olması halinde bir noktaya göre momentten bahsedilebilir.

Aslında bu moment o noktasından geçen ve düzleme dik olan eksene göre momenttir. Düzlemsel kuvvetlerde moment vektörünü göstermeye gerek yoktur. Kuvvetlerin düzlemde olması durumunda noktaya göre moment den bahsedilebilir.



Şekil 3.2 Düzlemde Momentlerin yönü

Sisteme birden çok kuvvetin etkimesi durumunda ise momentler toplanır.

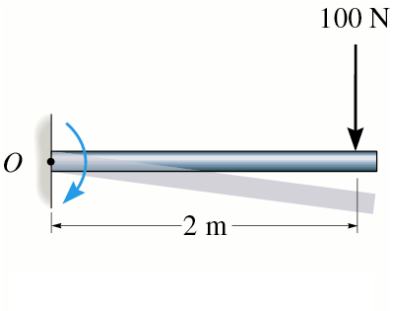


$$+M_{R_o} = \sum Fd$$

Şekil 3.3 Momentlerin Toplanması

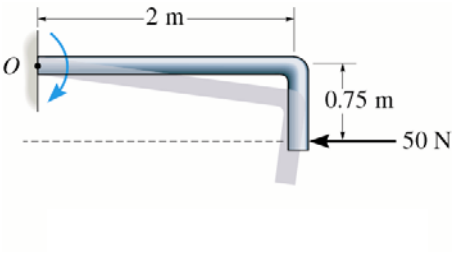
Örnekler;

Örnek 1:



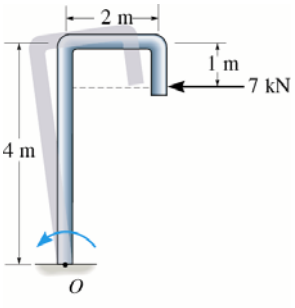
$$M_O = (100\,N)(2\,m) = 200\,N \cdot m$$

Örnek 2:



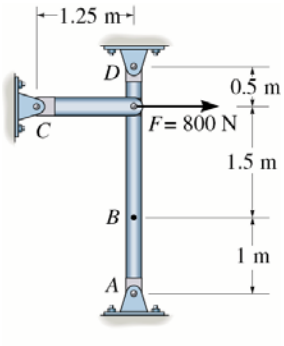
$$M_O = (50\,\text{N})(0.75\,\text{m}) = 75\,\text{N}\cdot\text{m}$$

Örnek 3:



$$M_O = (7\,\text{kN})(4-1\,\text{m}) = 21.0\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

Örnek 4:



$$M_A = 800\ \text{N}\ (2.5\ \text{m}) = 2000\ \text{N}\cdot\text{m}$$

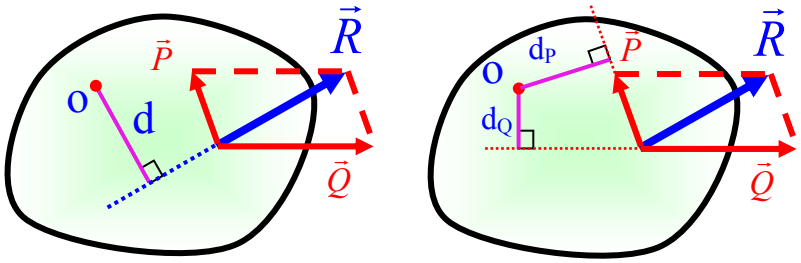
$$M_B = 800\ \text{N}\ (1.5\ \text{m}) = 1200\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = 800\ \text{N}\ (0\ \text{m}) = 0\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = 800\ \text{N}\ (0.5\ \text{m}) = 400\ \text{N}\cdot\text{m}$$

3.2 VARİGNON TEOREMİ

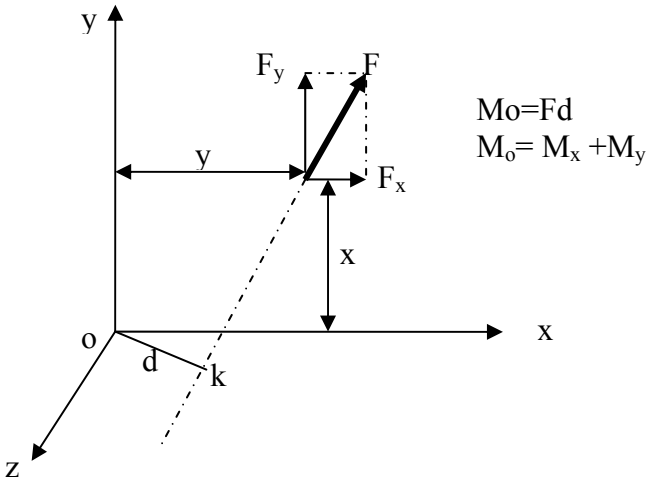
Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti, bu kuvvetin bileşenlerinin yine aynı noktaya göre momentlerinin toplamına eşittir.



$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} \;\Rightarrow\; M_o(R) = M_o(P) + M_o(Q)$$

Şekil 3.4 Varignon teoremi

Bu teorem ikişer, ikişer kuvvetler için peş peşe uygulanarak ikiden çok kuvvet ve onların bileşenleri için ispat edilebilir. Yani *bir noktada kesişen birçok kuvvetin herhangi bir noktaya göre momentleri toplamı aynı noktaya göre bileşke kuvvetin momentine eşittir.* Bu teorem hem bağlı hem de kayıcı vektörlere uygulanabilir. Varignon teoreminden yararlanarak bileşke kuvvetin bir noktaya göre momenti yerine bu kuvvetin bileşenlerinin aynı noktaya göre momentlerini almak çoğu zaman daha elverişli olmaktadır



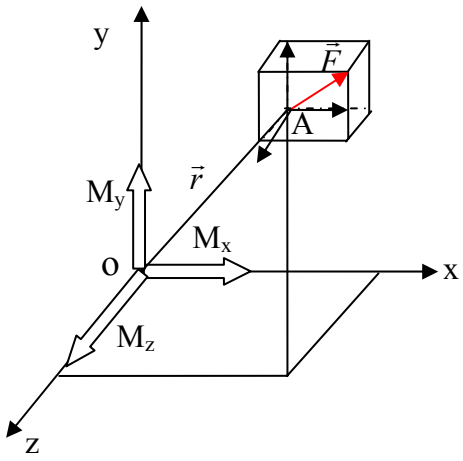
Şekil 3.5 Kartezyen koordinatlarda Bir kuuvetin momenti

Uzay kuvvet sistemleri için varignon teoremi genelleştirilirse bileşenleri F_x , F_y , F_z olan ve uzayda A (x, y, z) noktasına etki eden bir kuvvetin eksenlere göre momentleri yazılabilir. Bunlar;

$$M_x = F_z.y + F_y.z$$

$$M_y = F_x.z + F_z.x$$

$$M_z = F_y.x + F_x.y$$



Şekil 3.6 Uzayda bir kuvvetin momenti

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r} = r_x.\vec{i} + r_y.\vec{j} + r_z.\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x.\vec{i} + F_y.\vec{j} + F_z.\vec{k}$$

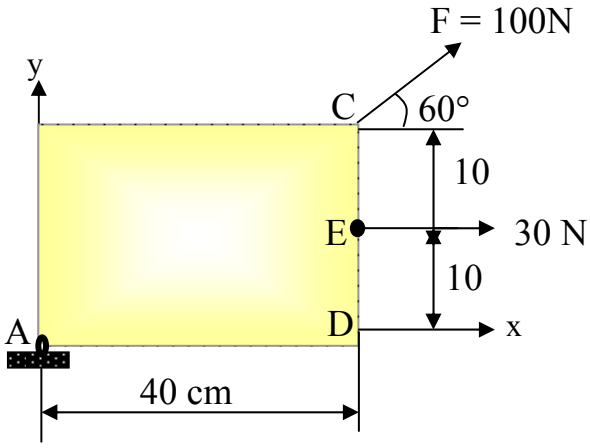
$$(M_o) = \vec{r} x \vec{F}$$

$$M_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$M_o = M_x.i + M_y.j + M_z.k$$

$$M_o = (F_z.r_y - F_y.r_z)i - (F_z.r_x - F_x.r_z)j + (F_y r_x + F_x r_y)k$$

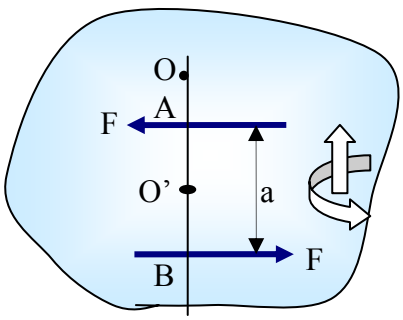
Problem:



$M_A = ?$

3.3 KUVVET ÇİFTLERİ

Zıt yönlerde etkiyen eşit iki kuvvetten meydana gelen sisteme kuvvet çifti denir. Burada dengelenmiş bir moment bulunmaktadır. Moment Merkezi, Kuvvetlerin arasında veya dışında yada kuvvetlerden biri üzerinde alınsa yine aynı şiddette ve aynı döndürme yönünde kuvvet çifti elde edilir.

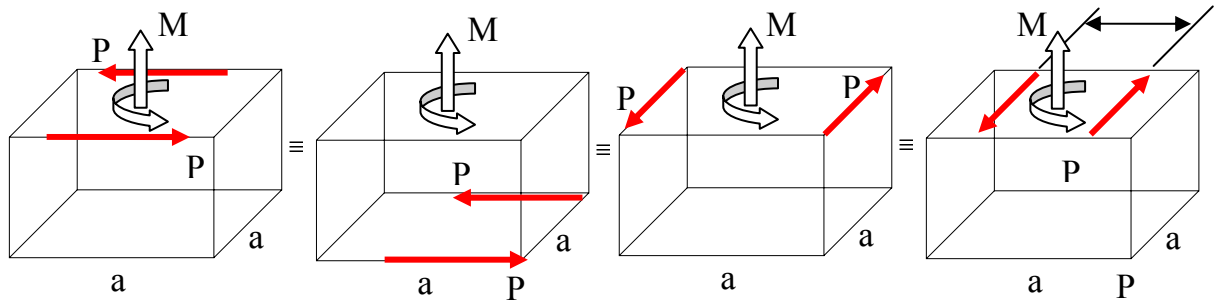


Şekil 3.7 Kuvvet çiftleri

$M_0 = -(OA)F+F.(OB)$ $\qquad$ $M_0' = (O'A).F + (O`B).F$

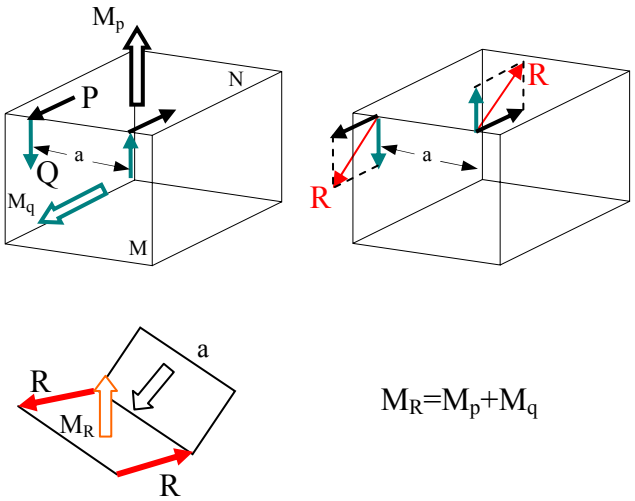
$M_0 = F\,a$ $\qquad$ $M_0 = F.a$

Moment vektörlerinin büyüklüğü moment merkezine bağlı olmadığı için aynı zamanda düzlem üzerinde herhangi bir noktaya kayabilirler.



Şekil 3.8 Kuvvet Çiftlerinin Konumu

3.4 KESİŞEN DÜZLEMLERDEKİ KUVVET ÇİFTLERİ VE KUVVET ÇİFTLERİNİN BİLEŞKESİ



$M_R = M_p + M_q$

Şekil 3.9 Kuvvet çiftlerinin Toplanması

Kesişen iki düzlem M ve N olsun. Bunlar üzerinde iki tane kuvvet çifti bulunsun. (M_P, Mq). Bu kuvvet çiftlerinin şiddetleri ve yönleri aynı kalmak şartıyla aralarındaki uzaklıklar değiştirilebilmektedir. Bu sonuçtan yararlanarak Kuvvet çiftlerinin moment kolları değiştirilerek ara kesit üzerinde aynı noktalardan geçmeleri sağlanabilir. Mp = P.a ; Mq = Q.a

Şiddetleri Pa ve Qa olan ve ara kesit üzerinde A ve B noktalarında kesişen iki kuvvet çifti görülmektedir. Çiftlerin momentleri Mp ve Mq düzlemlere dik olarak çizilmiştir. A ve B noktalarında kuvvetler paralel kenar kanunu kullanılarak P ve Q kuvvetlerinin bileşke kuvvet çiftini temsil eden iki eşit paralel ve zıt yönlü R kuvvetini elde ederiz. R = P + Q dur. Bileşke çiftinin şiddeti M_R = R.a dır. Dolayısıyla bu düzlemlere dik ve çiftleri temsil eden moment vektörlerinin vektörel toplamı bileşke kuvvet çiftini temsil eden moment vektörlerini verir. Yani

$$M_R = Mp + Mq$$

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$$

$$R.a = \sqrt{P^2a^2 + Q^2a^2 + 2PQa^2\cos\theta}$$

$$M_R = \sqrt{Mp^2 + Mq^2 + 2MpMq.\cos\theta}$$

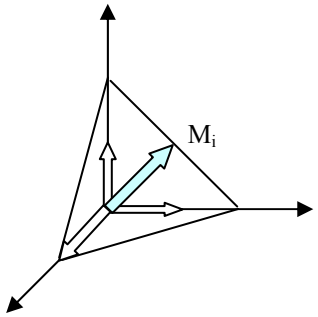
$$\text{Cos } 90 = 0$$

$$M_R = \sqrt{Mp^2 + Mq^2}$$

Kuvvetler için yapılan bütün vektörel işlemler kuvvet çiftlerini temsil eden moment vektörleri içinde geçerlidir.

3.4.1 Kuvvet Çiftlerine İz Düşüm Yönteminin Uygulanması

Kuvvet çiftlerini temsil eden momentlerin bileşkelerin vektörel toplamıyla bulunduğunu gördük. Bileşenlere aynı yöntemle ayrılmaktadır. Uzayda bileşke momentin geometrik yolla dik iki düzlemde bulunması her zaman mümkün değildir. Bunun yerine izdüşüm yöntemi kullanmak daha elverişlidir.



$(M_x)i = M_i.\cos\alpha_i$

$(M_y)i = M_i.\cos\beta i$

$(M_z)i = M_i.\cos\gamma_i$

Burada α_i, β_i, γ_i M_i moment vektörünün sırasıyla x, y, z eksenlerine yaptıkları açılardır. Kuvvet çiftlerinin kendi düzlemleri içinde ki konumlarının önemi olmadığına kuvvet çiftlerinin düzlemleri kendilerine paralel olarak hareket ettirmekle çiftlerin etkileri değişmeyeceğine göre uzaydaki herhangi bir kuvvet çifti sistemin uzayda herhangi bir

noktasında kesişen moment vektörüyle temsil edilebilir. Buradan bir noktada kesişen uzay kuvvetlerine benzer olarak herhangi bir M_1 , M_2 , M_3.....M_n kuvvet çifti sisiteminin M bileşke kuvveti çifiti

$$M_x = \sum_{i=0}^{n} M_x i \qquad M_y = \sum_{i=0}^{n} M_y i \qquad M_z = \sum_{i=0}^{n} M_Z i$$

olarak bulunabilir. Bileşke kuvvet çiftinin şiddeti $|M| = \sqrt{Mx^2 + My^2 + Mz^2}$ ile verilir.

x, y, z eksenleriyle yaptığı açıların doğrultman cosinüsleri

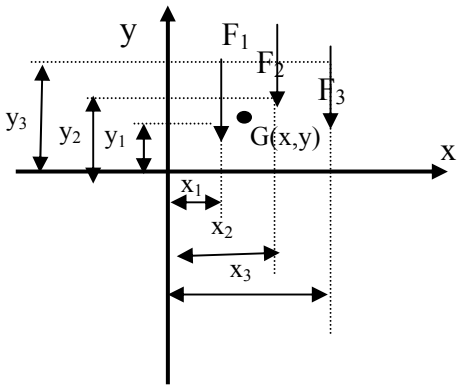
$$\cos \propto = \frac{Mx}{|M|} \quad , \quad \cos \beta = \frac{My}{|M|} \quad , \quad \cos \gamma = \frac{Mz}{|M|} \quad \text{dir.}$$

3.5 KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKELERİ

Mekanikte birçok problem kuvvet sistemlerini ilgilendirir. Bu kuvvet sistemlerinin yapacağı tesiri izah ederek en basit hale dönüştürmek gerekir. Bir kuvvet sisteminin bileşkesi rijit cisme tesir eden dış etkileri değiştimeksizin orjinal kuvvetlerin en basit kombinezonudur. Bir cismin dengesi için üzerine tesir eden bütün kuvvetlerin bileşkesinin sıfır olması şarttır. Eğer bir cisme tesir eden kuvvwetlerden doğan bileşke sıfır değilse cismin kütlesiyle ivmenin çarpımını bileşke kuvvete eşitleyerek ivme tanımlanır.

3.5.1 Paralel Kuvvet Sistemleri

Bileşkenin şiddeti sistemi meydana getiren kuvvetlerin skaler toplamına eşittir. Bileşkenin tesir çizgisinin konumu Varignon teoremi ile bulunur.



$$xR = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3$$

$$yR = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i x_i}{R} \qquad y = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i x_i}{R}$$

3.5.2 Eşdeğer Kuvvet Sistemleri

Eğer iki kuvvet sistemi verilen herhangi bir noktada aynı kuvvet ve kuvvet çiftine indigenebiliyorsa birbirine eşdeğerdir denir. Bir nokta için sağlanan eşdeğerlik bundan sonra bütün diğer noktalar içinde sağlanabilir. Matematik olarak gerekçe ve yeter şart ;

$$\Sigma F = \Sigma F` \quad , \quad \Sigma M_o = \Sigma M_o`$$

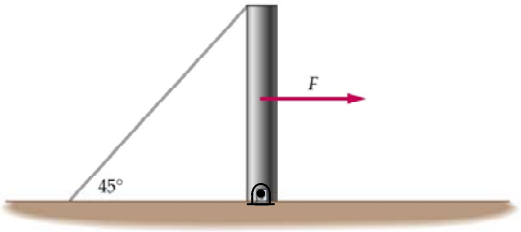
$$\Sigma Fx = \Sigma Fx` \quad , \quad \Sigma Fy = \Sigma Fy` \quad , \quad \Sigma Fz = \Sigma Fz`$$

$$\Sigma Mx = \Sigma Mx` \quad , \quad \Sigma My = \Sigma My` \quad , \quad \Sigma Mz = \Sigma Mz` \text{ dir.}$$

Bunun manası şudur. Eğer iki kuvvet sistemi bir rijit cisme x, y, z doğrultularında aynı öteleme ve döndürmeyi yaptırmaya çalışırsa bu kuvvet sistemleri birbirie eşdeğerdir denir.

3.6 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1:

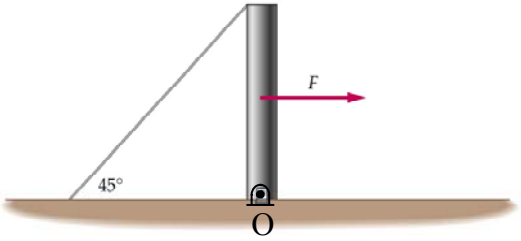


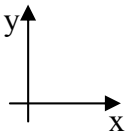
Ağırlığı ihmal edilen ve boyu L olan bir çubuk bir pim ile şekilde görüldüğü gibi zemine bağlanmıştır. Ayrıca çubuğun üst kısmı da bir kablo ile zemine bağlanmıştır. Eğer çubuğun ortasına bir F kuvveti yatay olarak uygulanırsa;

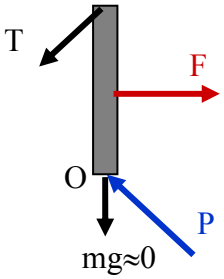
a) Kablodaki çeki kuvvetini

b) Çubuğa ve pime etkiyen yatay ve dikey kuvvet bileşenlerini bulunuz.

Çözüm:







Statik Denge:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -T.Sin45 + F - P_x = 0 \quad .....(I)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -T.Cos45 + P_y = 0 \quad .....(II)$$

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow T.Sin45.L - F.\frac{L}{2} = 0 \quad .....(III)$$

$I.denklemden;\ P_x = \frac{T}{\sqrt{2}} - F$

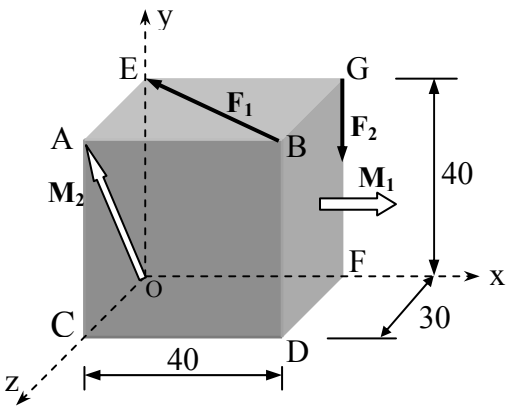
$II.denklemden;\ P_y = \frac{T}{\sqrt{2}}$

$III.denklemden; \frac{T}{\sqrt{2}}.L = F.\frac{L}{2} \Rightarrow T = F.\frac{\sqrt{2}}{2}\ olarak\ bulunur.$

$Buna\ göre;\ P_x = -\frac{F}{2}$

$P_y = \frac{F}{2}\ olarak\ elde\ edilir.$

Problem 2:



Verilen kuvvetleri ve kuvvet çiftlerini O'ya indirgeyiniz. (Birimler cm'dir.)

F_1= 2 kN
F_2= 3 kN
M_1= 5 kNcm
M_2= 10 kNcm

Çözüm:

B(40,40,30) ; E(0,40,0) ; G(40,40,0) ; F(40,0,0) ; O(0,0,0) ; A(0,40,30)

$$\overrightarrow{BE} = -40\vec{i} - 30\vec{k}$$
$$\overrightarrow{GF} = -40\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OA} = 40\vec{j} + 30\vec{k}$$

$$\overrightarrow{F_1} = 2000.(\frac{-40i - 30k}{\sqrt{40^2 + 30^2}}) = -1600i - 1200k$$

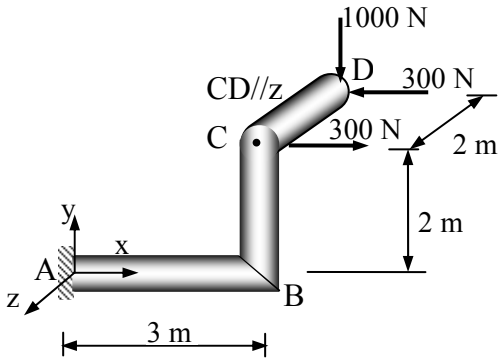
$$\overrightarrow{F_2} = 3000.(\frac{-40j}{40}) = -3000j$$

$$\overrightarrow{M_1} = 5000i$$
$$\overrightarrow{M_2} = 10000.(\frac{40j + 30k}{\sqrt{40^2 + 30^2}}) = 8000j + 6000k$$

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 5000i + 8000j + 6000k + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 40 & 40 & 30 \\ -1600 & 0 & -1200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 40 & 40 & 0 \\ 0 & -3000 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_0 = -43000i + 8000j - 50000k \quad \text{Ncm}$$

Problem 3:



Verilen kolda kuvvetleri ve kuvvet çiftlerini A' ya indirgeyiniz.

A'da doğacak reaksiyon kuvvetlerini hesaplayınız.

Çözüm:

Burada problemin çözümünde matris yöntemi kullanılacaktır. C ve D noktaları ayrı ayrı matris şeklinde yazılacaktır.

$$M_T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ -300 & -1000 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_T = i(0) - j(0) + k(0-600) + i(0-2000) - j(0-600) + k(-3000+600)$$
$$M_T = -2000i + 600j - 3000k$$

Burada;

$$M_x = -2000Nm \quad , \quad M_y = 600Nm \quad , \quad M_z = -3000Nm$$

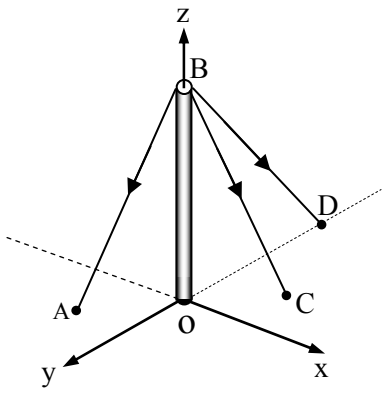
A noktasındaki mesnet reaksiyonları ise sırası ile;

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + 300 - 300 = 0 \Rightarrow A_x = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 1000 = 0 \Rightarrow A_y = 1000N$$
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z = 0$$

II. Yol:

$$M_T = (300+300)j + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1000 & 0 \end{vmatrix} = -2000i + 600j - 3000k$$

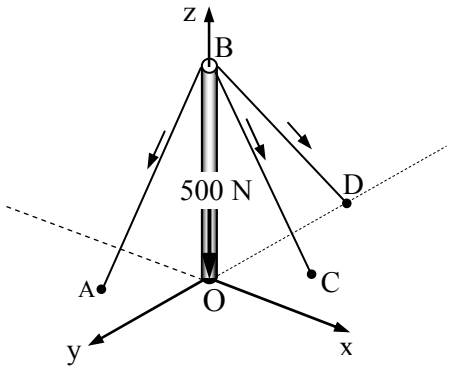
Problem 4:



A(-3, 2, 0), B(0, 0, 6), C(2, -3, 0), D(0, -3, 0)

Ağırlığı 500 N olan OB çubuğu yukarıda koordinatları verilen üç tel halatla A, C, D noktalarına sabitlenmiştir. Sistemin dengede kalabilmesi için halat germe kuvvetlerinin minimum ne olması gerektiğini hesaplayınız.

Çözüm:



$$\overrightarrow{BD} = 0 - 3\vec{j} - 6\vec{k} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$
$$\overrightarrow{BA} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\overrightarrow{F_{BD}} = F_{BD}\cdot\left(\frac{-3\vec{j}}{3\sqrt{5}} - \frac{6\vec{k}}{3\sqrt{5}}\right) \quad , \quad \overrightarrow{F_{BC}} = F_{BC}\cdot\left(\frac{2\vec{i}}{7} - \frac{3\vec{j}}{7} - \frac{6\vec{k}}{7}\right) \quad , \quad \overrightarrow{F_{BA}} = F_{BA}\cdot\left(-\frac{3\vec{i}}{7} + \frac{2\vec{j}}{7} - \frac{6\vec{k}}{7}\right)$$

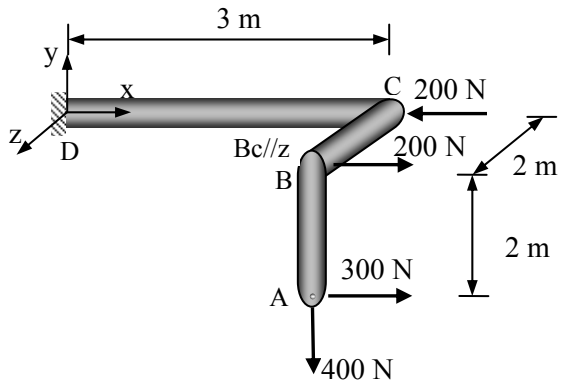
$$\sum F_x = 0$$
$$\frac{2}{7}F_{BC} - \frac{3}{7}F_{BA} = 0$$
$$\Rightarrow \underline{F_{BC} = 1{,}5F_{BA}}$$

$$\sum F_y = 0$$
$$-\frac{3}{3\sqrt{5}}F_{BD} - \frac{3}{7}F_{BC} + \frac{2}{7}F_{BA} = 0$$
$$-0{,}447F_{BD} - 0{,}428F_{BC} + 0{,}286F_{BA} = 0$$
$$\Rightarrow \underline{F_{BD} = -0{,}796F_{BA}}$$

$$\sum F_z = 0$$
$$-\frac{6}{3\sqrt{5}}F_{BD} - \frac{6}{7}F_{BC} - \frac{6}{7}F_{BA} - 500 = 0$$
$$-1{,}431F_{BA} = 500$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{BA} = -350\,N}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{Bc} = -525\,N}}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{BD} = 278{,}6\,N}}$$

Problem 5:



Verilen kolda kuvvetleri ve kuvvet çiftlerini D'ye indirgeyiniz ve D'de doğacak mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.

Çözüm:

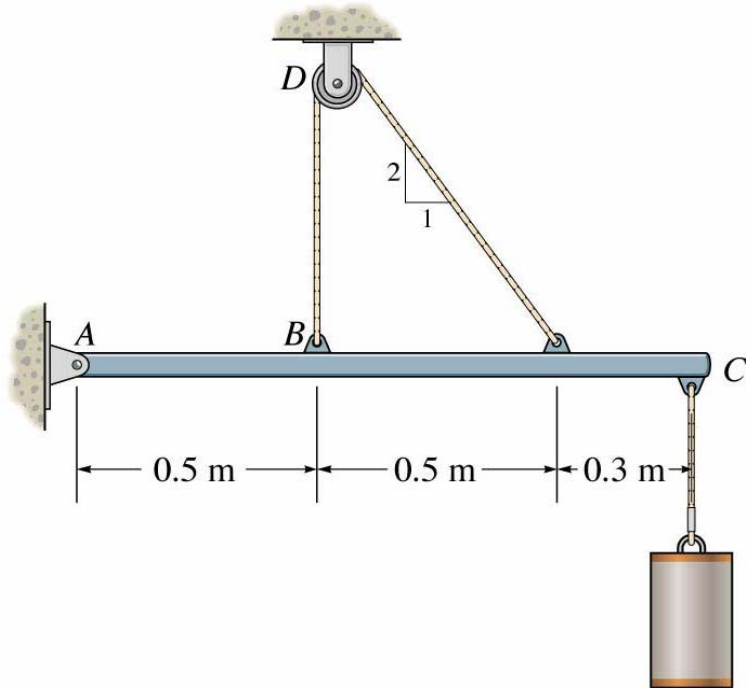
$$M_D = 400j + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \\ 300 & -400 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_D = 400j + i(0+800) - j(0-600) + k(-1200+600)$$

$$M_D = 800i + 1000j - 600k$$

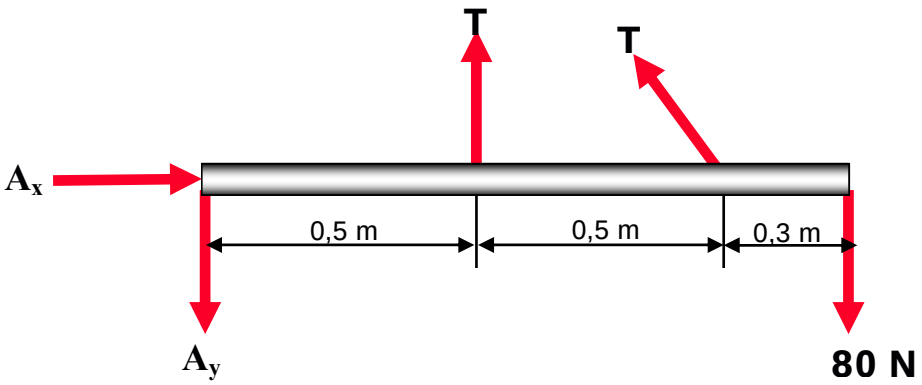
$$D_x = -300N \quad D_y = 400N \quad D_z = 0$$

Problem 6:



Şekilde görüldüğü gibi C noktasından asılı olan cisim 80 N ağırlığa sahiptir. Buna göre kablonun yatay ve dikey çekme kuvvetlerini ve A piminde meydana gelen reaksiyon kuvvetlerini bulunuz. (D'deki makara sürtünmesizdir.)

Çözüm:



Denge denklemlerine göre;

$$\sum M_A = 0 \qquad T(0.5) + T\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)(1) - 80(1.3) = 0$$

$$T = 74.583 \text{ N}$$

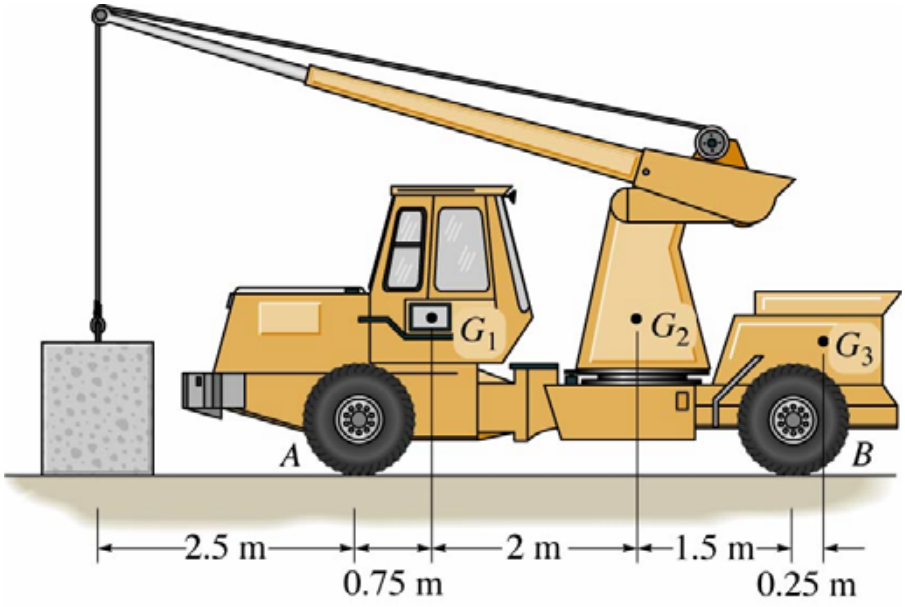
$$\sum F_x = 0 \qquad A_x - 74.583\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$A_x = 33.4 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad 74.583 + 74.583\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 80 - A_y = 0$$

$$A_y = 61.3 \text{ N}$$

Problem 7:

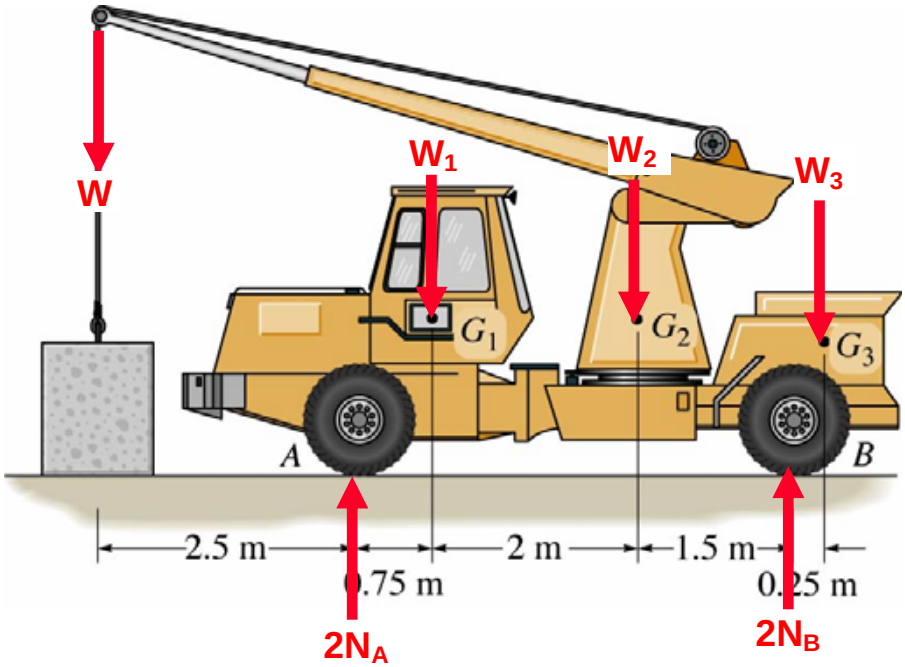


Şekildeki vinç G_1, G_2 ve G_3 olarak ifade edilen ağırlık merkezlerinden W_1=14000 N, W_2=3600 N ve W_3=6000 N olmak üzere üç ağılığa sahiptir. Ağırlık kaldırma kollarının ağırlığını ihmal ederek;

a) 3200 N ağırlığa sahip cisim eğer sabit hızla kaldırılırsa dört tekerde meydana gelecek reaksiyon kuvvetlerini bulunuz.

b) Ağırlık kaldırma kolu şekildeki pozisyonda tutulursa kolun uç kısmı ile ne kadarlık ağırlık kaldırılabilir.

Çözüm:



a)

W=3200 N

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (2N_B)(4.25) - (6000)(4.5) - (3600)(2.75) - (14000)(0.75) + (3200)(2.5) = 0$$

$$8.5N_B - 39400 = 0$$

$$N_B = 4635\ \text{N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2N_A + 2N_B - 3200 - 14000 - 3600 - 6000 = 0$$

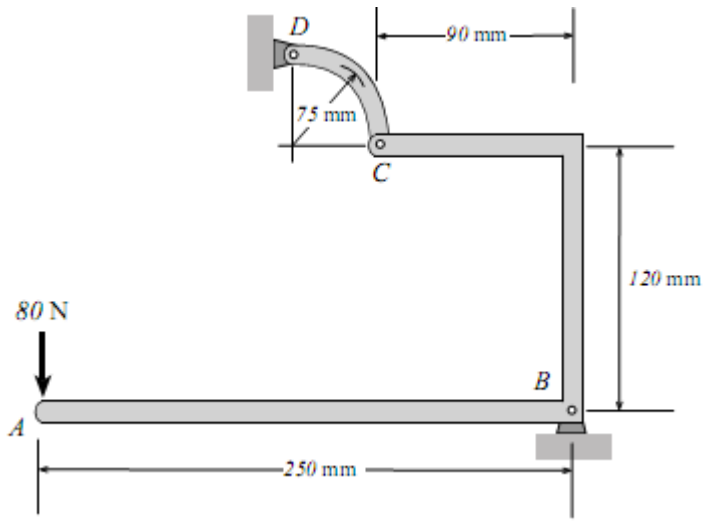
$$N_A = 8765\ \text{N}$$

b)

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -(6000)(4{,}5) - (3600)(2{,}75) - (14000)(0{,}75) + W(2{,}5) = 0$$

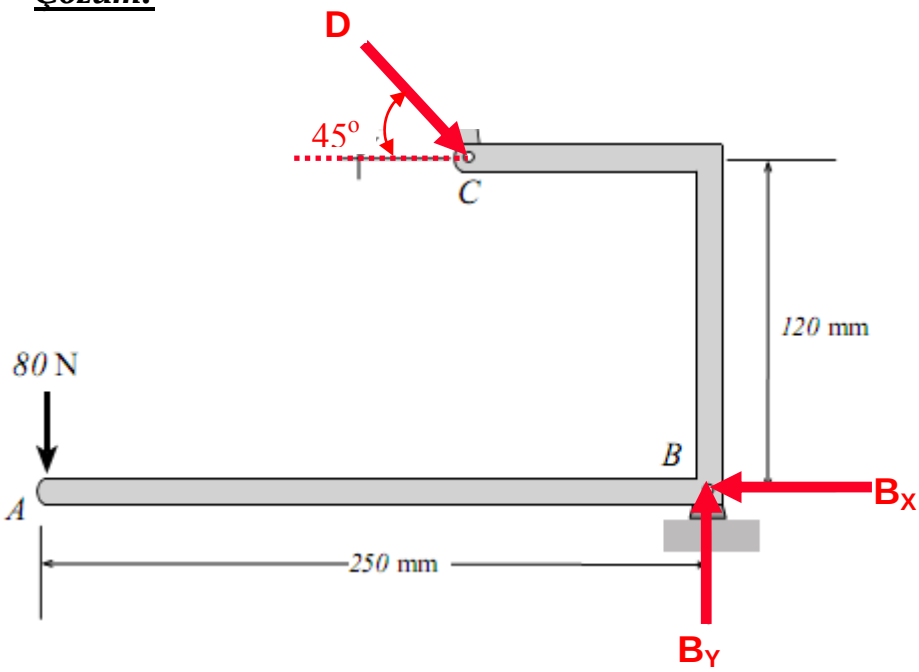
$$W = 18960\ \text{N}$$

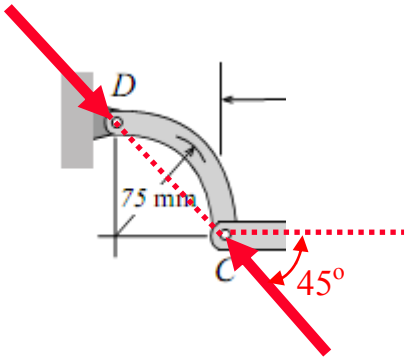
Problem 8:



ABC elemanı B noktasından bir pim ile desteklenmiştir ve DC elemanına da C noktasından bir pim ile bağlanmıştır. Buna göre B ve D noktasında meydana gelen reaksiyon kuvvetlerini bulunuz.

Çözüm:



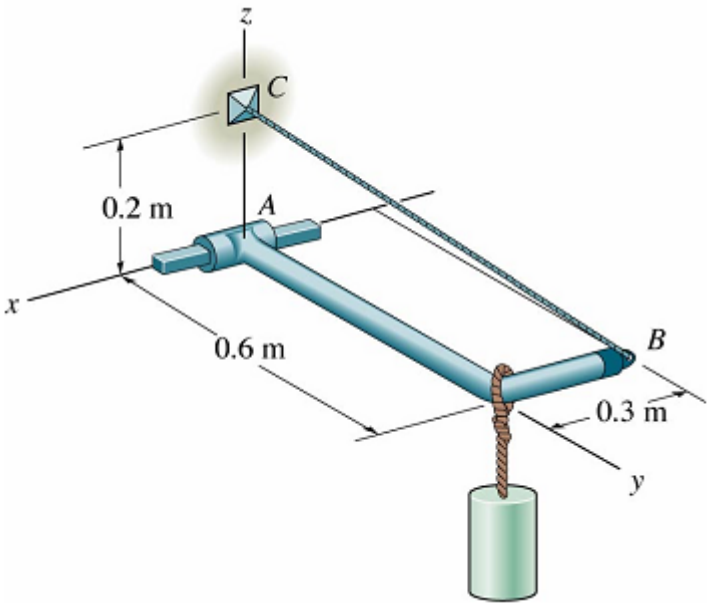


$$\sum M_B = 0 \qquad 80(250) - (D.Cos45^o)(120) + (DSin45)(90) = 0$$
$$D = 942.8\ N$$

$$\sum F_x = 0 \qquad -B_x + D.Cos45^o = 0$$
$$B_x = 666.67\ N$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -80 + B_y - D.Sin45^o = 0$$
$$B_y = 746.67\ N$$

Problem 9:



AB kolu, 800 N ağırlığındaki silindiri BC kablosu ile şekilde görüldüğü gibi tutmaktadır. Buna göre, A mesnedindeki reaksiyon kuvvetlerini ve BC kablosundaki çekme kuvvetini bulunuz.

Çözüm:

A(0 ; 0 ; 0), B(-0,3 ; 0,6 ; 0), C(0 ; 0 ; 0,2)

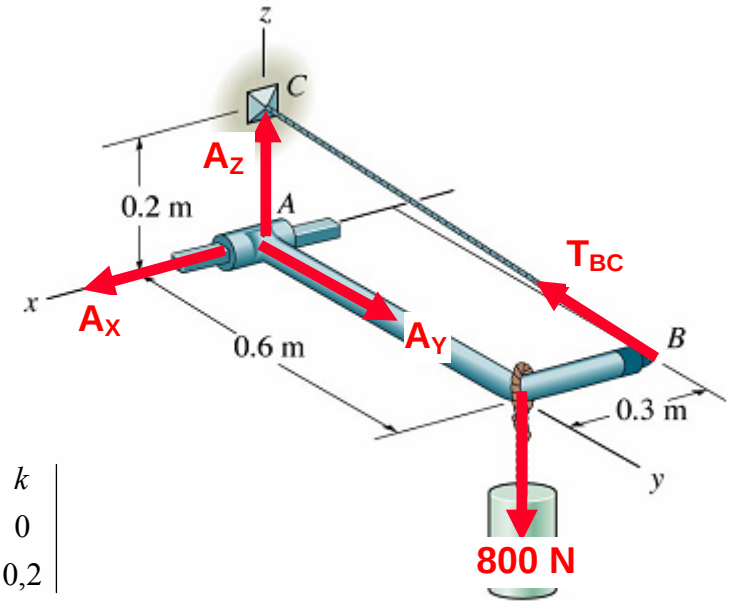
$\overrightarrow{BC} = 0{,}3i - 0{,}6j + 0{,}2k$

$|BC| = 0{,}7$

$$T_{BC} = T_{BC}\left(\frac{0{,}3}{0{,}7}i - \frac{0{,}6}{0{,}7}j + \frac{0{,}2}{0{,}7}k\right)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \sum M_A = \sum (r_{AB} \text{ x } F) = 0$$

F kuvvet ve r ise konum vektörüdür.



$$\sum M_A = (-800N.0{,}6)i + \frac{T_{BC}}{0{,}7}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -0{,}3 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}6 & 0{,}2 \end{vmatrix}$$

$$\sum M_A = (-480\,N)i + \frac{T_{BC}}{0{,}7}(0{,}12i + 0{,}6j)$$

Buna göre;

$$-480\,N + \frac{T_{BC}}{0,7}0,12 = 0 \Rightarrow T_{BC} = 2800\,N$$

$$\sum \mathrm{F_x} = 0 \Rightarrow \mathrm{A_x} + \frac{0,3}{0,7}T_{BC} = 0 \Rightarrow \mathrm{A_x} = -1200\,N$$

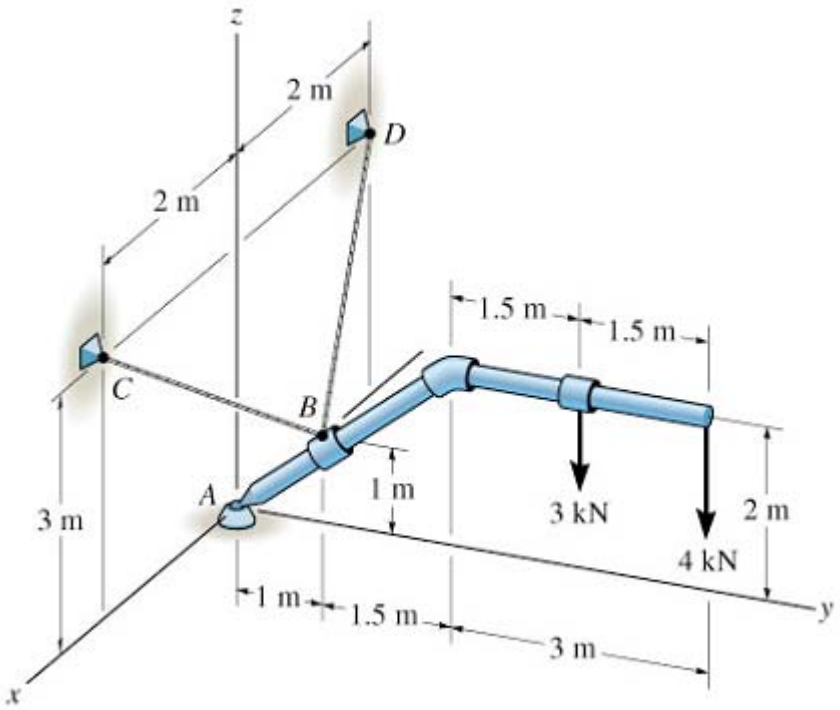
$$\sum \mathrm{F_y} = 0; \qquad \mathrm{A_y} - \frac{0,6}{0,7}T_{BC} = 0$$

$$\mathrm{A_y} = 2400\,\mathrm{N}$$

$$\sum \mathrm{F_Z} = 0\ ; \qquad \mathrm{A_Z} + \frac{0,2}{0,7}T_{BC} - 800\,N = 0$$

$$\mathrm{A_Z} = 0$$

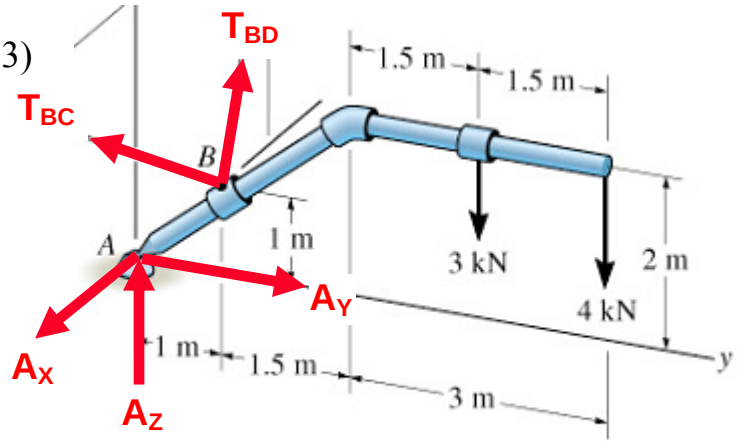
Problem 10:



Bir boru, üzerinde dikey olarak uygulanmış olan 3 kN ve 4 kN'luk yükleri BC ve BD kabloları ile taşınmaktadır. Buna göre, A küresel mafsalındaki reaksiyon kuvvetlerini ve B bağlantı noktasındaki kablolardaki çekme kuvvetlerini bulunuz.

Çözüm:

A(0;0;0), B(0;1;1), C(2;0;3), D(-2;0;3)



$$\overrightarrow{BD} = -2i - j + 2k$$

$$\overrightarrow{BC} = 2i - j + 2k$$

$$|BD| = |BC| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$T_{BD} = T_{BD}\left(\frac{-2}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k\right)$$

$$T_{BC} = T_{BC}\left(\frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k\right)$$

$$\sum M_A = \sum (\text{r x F}) = (-3kN.4)i - (4kN.5{,}5)i + \frac{T_{BD}}{3}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \frac{T_{BC}}{3}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\sum M_A = (-34kN)i + \frac{T_{BD}}{3}(3i - 2j + 2k) + \frac{T_{BC}}{3}(3i + 2j - 2k)$$

Buna göre;

$$i = 0 \Rightarrow -34kN + \frac{T_{BD}}{3}3 + \frac{T_{BC}}{3}3 = 0 \Rightarrow T_{BD} + T_{BC} = 34\,kN$$

$$j = 0 \Rightarrow \frac{T_{BD}}{3}2 - \frac{T_{BC}}{3}2 = 0 \Rightarrow T_{BD} = T_{BC}$$

$$k = 0 \Rightarrow T_{BD} = T_{BC} = 17\,kN$$

$$\sum \mathrm{F_x} = 0 \Rightarrow \mathrm{A_x} - \frac{2}{3}T_{BD} + \frac{2}{3}T_{BC} = 0 \Rightarrow \mathrm{A_x} = 0$$

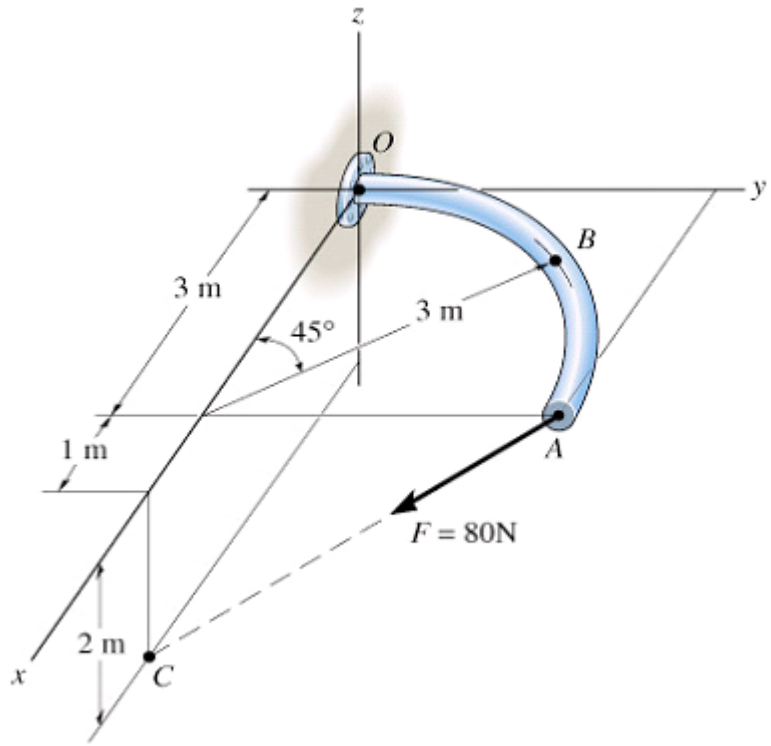
$$\sum \mathrm{F_y} = 0; \qquad \mathrm{A_y} - \frac{1}{3}T_{BD} - \frac{1}{3}T_{BC} = 0$$

$$\mathrm{A_y} = 11{,}3\mathrm{kN}$$

$$\sum \mathrm{F_Z} = 0\ ; \qquad \mathrm{A_Z} + \frac{2}{3}T_{BD} + \frac{2}{3}T_{BC} - 3kN - 4kN = 0$$

$$\mathrm{A_Z} = -15{,}66\,\mathrm{kN}$$

Problem 11:



Eğrisel çubuk x-y düzleminde olup yarıçapı 3m'dir. Eğer çubuğun ucundan 80 N'luk bir kuvvet uygulanırsa, bu kuvvetten dolayı oluşan momenti;

a) O noktasına göre,

b) B noktasına göre bulunuz.

Çözüm:

a) A(3;3;0), C(4;0;-2)

$$\overrightarrow{AC} = i - 3j - 2k$$

$$|AC| = 3{,}74$$

$$F_{AC} = F\frac{AC}{|AC|} = \frac{i - 3j - 2k}{3{,}74}$$

$$F_{AC} = \{21{,}39\,i - 64{,}17\,j - 42{,}78\,k\}\,N$$

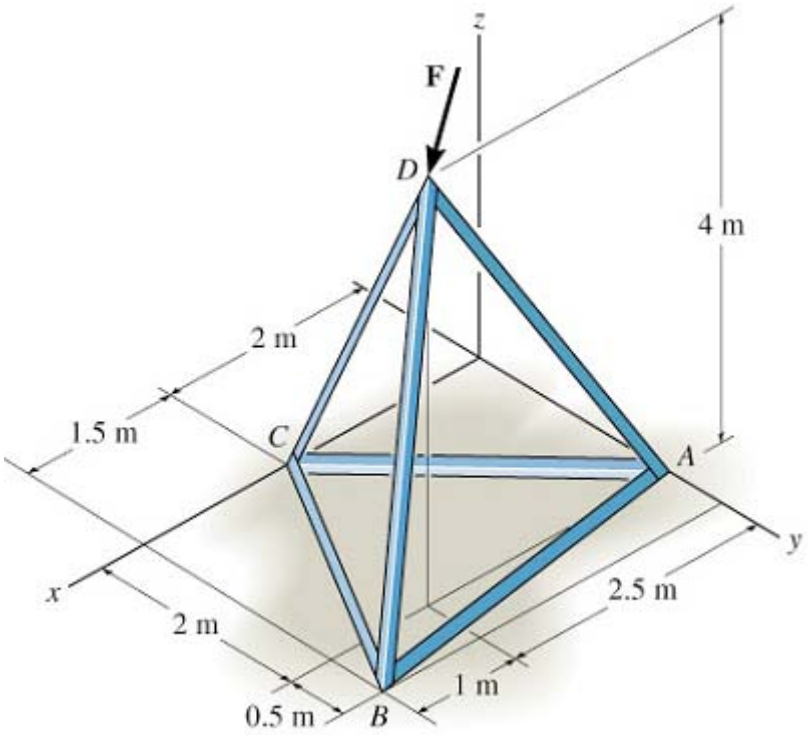
$$M_O = \sum(r_{OA} \times F) \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 0 \\ 21{,}39 & -64{,}17 & -42{,}78 \end{vmatrix} = \{-128{,}34i + 128{,}34j - 256{,}68k\}\,N.m$$

b) B $(3-3.\cos 45^o\,;\ 3.\sin 45^o\,,\ 0) \Rightarrow$ B(0,878 ; 2,12 ; 0) ve C(4,0,-2)

$$r_{BC} = r_C - r_B = (4 - 0{,}878; -2{,}12; -2) = (3{,}122; -2{,}12; -2)$$

$$M_B = r_{BC} \text{ x } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3{,}122 & -2{,}12 & -2 \\ 21{,}39 & -64{,}17 & -42{,}78 \end{vmatrix} = \{-37{,}57\,i + 90{,}71j - 154{,}8k\}\text{N.m}$$

Problem 12:



Şekildeki üçayaklı çerçevenin CA parçasını temel alarak $F = \{50\,i - 20j - 80k\}$kuvveti nin momentini bulunuz.

Çözüm:

A(0;2;0), C(2;0;0), D(2,5;2;4)

$r_A = \{2j\}m$, $r_C = \{2i\}m$, $r_D = \{2{,}5i + 2j + 4k\}m$

$$r_{CA} = r_A - r_C = 2j - 2i = \{-2i + 2j\}\text{m}$$

$$r_{AD} = r_D - r_A = 2.5i + 2j + 4k - 2j = \{2.5i + 4k\}\text{m}$$

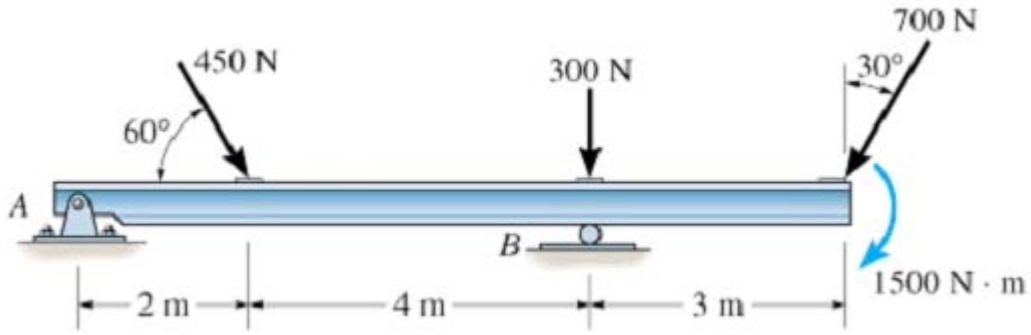
$$U_{AC} = \frac{r_{CA}}{r_{CA}} = \frac{-2i + 2j}{\sqrt{(-2)^2 + (2)^2}} = -0.707i + 0.707j$$

$$M_{CA} = U_{CA}.(r_{AD} x F) = \begin{vmatrix} -.0707 & 0.707 & 0 \\ 2.5 & 0 & 4 \\ 50 & -20 & -80 \end{vmatrix}$$

$$M_{CA} = 226{,}24\text{Nm}$$

$$M_{CA} = M_{CA}\,U_{CA} = \{-160i + 160j\}\text{N.m}$$

Problem 13:



Çözüm:

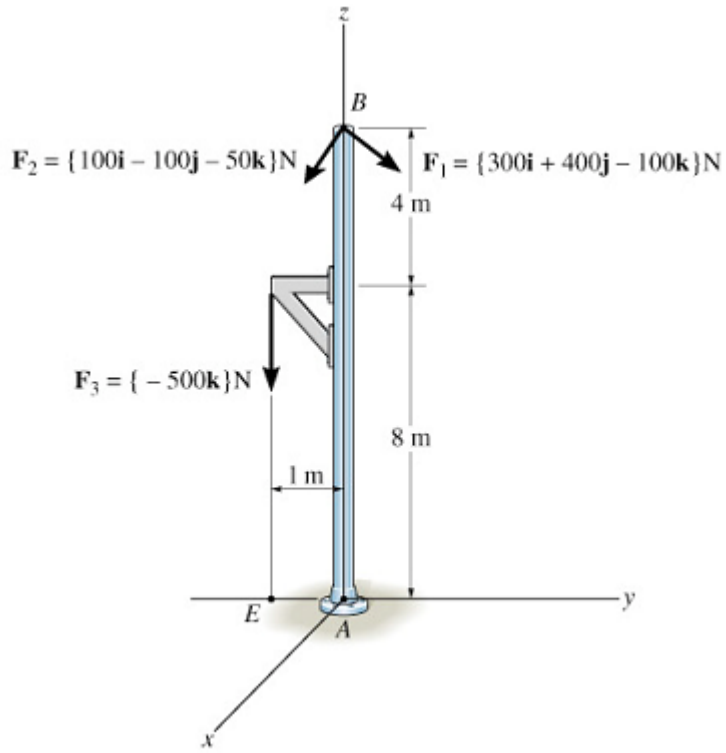
$$F_{RX} = \sum F_x \rightarrow F_{RX} = 450\cos 60^o - 700\sin 30^o = -125N$$
$$F_{Ry} = \sum F_y \rightarrow F_{Ry} = -450\cos 60^o - 700\sin 30^o - 300 = -1296N$$

$$F_R = \sqrt{(F_{Ry})^2 + (F_{Ry})^2} \rightarrow F_R = 1302N$$
$$F_{RX} = 125N \qquad \tan\theta = \frac{1296}{125} \Rightarrow \theta = 84.5^o$$

$$M_{RB} = \sum M_{RB} \rightarrow M_{RB} = -1500 - 700\cos 30^o(3) + 450\sin^o 60^o(4)$$
$$= -1760N.m = 1760N.m$$
$$F_R = 1302N$$

$$M_{RB} = 1760N.m \qquad 1302(\sin 84.5^o)x = 1760$$
$$x = 1.357m$$

Problem 14:



Çözüm:

$\underline{r}_A = 0 \qquad r_E = \{-1\underline{j}\}m$

$r_B = \{12\underline{k}\}m$

$\underline{r}_{AB} = \underline{r}_B \underline{r}_A = \{12\underline{k}\}m$

$\underline{r}_{AE} = \underline{r}_E \underline{r}_A = \{-1\underline{j}\}m$

$F_R = \sum F, \qquad F_R = F_1 + F_2 + F_3$

$= \{300\underline{i} + 400\underline{j} - 100\underline{k}\} + \{100\underline{i} - 100\underline{j} - 50\underline{k}\} + \{-500\underline{k}\}$

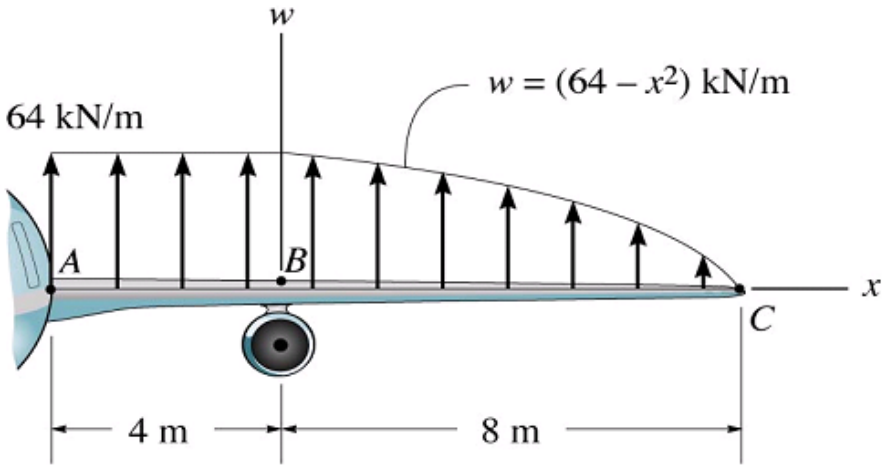
$= \{400\underline{i} + 300\underline{j} - 650\underline{k}\}N$

$M_{RA} = \sum M_A \;\; ; \;\; M_{RA} = \underline{r}_{AB} x F_1 + \underline{r}_{AB} x F_2 + \underline{r}_{AE} x F_3$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 300 & 400 & -100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 100 & -100 & -50 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix}$$

$= \{-3100\underline{i} + 4800\underline{j}\}N.m$

Problem 15:



Çözüm:

$$F_R = \sum F_y = 64(4) + \int_o^{\omega} \omega ax$$

$$= 254 + \int_o^8 (64 - X^2)dx$$

$$= 254 + 341.33 \Rightarrow F_R = 595.3\,kN$$

$$341.3\chi = \int_o^8 x.\omega.\omega$$

$$341.3x + \int_o^8 x(64 - x^2)dx$$

$$341.3x + \int_o^8 x(64 - x^3)dx$$

$$341.3x = 1024 \Rightarrow x = 3.00m$$

F_{ry}=254+341.3=595.3 kN
M_A=254(2)+341.3(7)=2897.7 kn.m

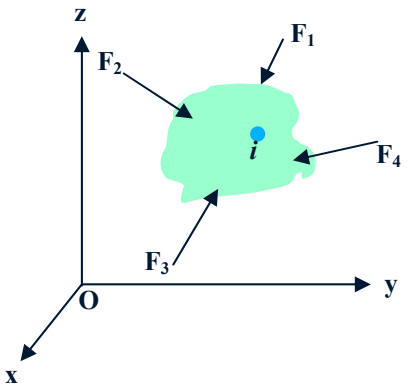
595.3(x)=2897.7 kNm $\Rightarrow \bar{x} \equiv 4.86m$

BÖLÜM 4

RİJİT CİSİMLERİN DENGESİ

4.1 GİRİŞ VE TANIMLAR

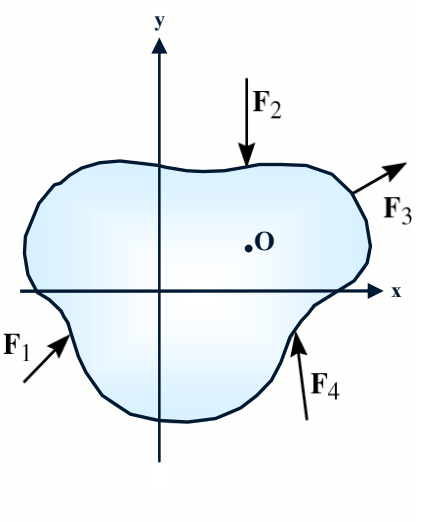
Kuvvet etkisindeki bir kontrüksiyon (yapı), rijit bir cisim gibi hareket etmiyorsa dengededir (Şekil 4.1). Rijit cismin hareketi, ötelenme yada dönmedir veya ikisinin birleşimi şeklinde olabilir. Yapının dengede kalabilmesi için, yapıyı döndürmeye veya ötelemeye sebep olan kuvvet mesnet noktalarındaki tepki kuvvetleri ile dengelenmelidir.



Şekil 4.1 Rijit Cismin Dengesi

İki boyutlu bir yapının herhangi bir yönde hareket etmemesi için gerekli olan şart, o yapının birbirine dik herhangi iki yönde hareket etmemesi şeklinde tanımlanabilir. Normal olarak (şart olmamak koşulu ile) bu yönler yatay ve dikey alınır. Yapıya herhangi bir yönde kuvvet etki etmez ise yapı o yönde harekete zorlanmaz. Bundan dolayı yatay yönde herhangi bir hareket olmaması için o yönde etki eden bütün kuvvetlerin toplamı sıfır olmalıdır ($\Sigma F_x = 0$). Benzer şekilde, dikeyde hareket olmaması için ($\Sigma F_y = 0$) olmalıdır.

Bir yapının düzlem içinde dönmeme şartı, o yapının bir eksende dönmemesi ile belirlenir. Böylece, düzlemin herhangi bir noktasında kuvvetlerin bileşke momentinin olmaması lazım gelir. Bundan dolayı, düzlemde dönme olmaması için herhangi bir noktada momentlerin toplamı sıfır olmalıdır. Yani, sistemin içinde yada dışında noktaya göre alınan moment sıfır ($\Sigma M = 0$) olmalıdır.



Şekil 4.2: Kuvvetlerin Gösterimi

İki boyutlu bir yapının tamamıyla dengede olabilmesi için;

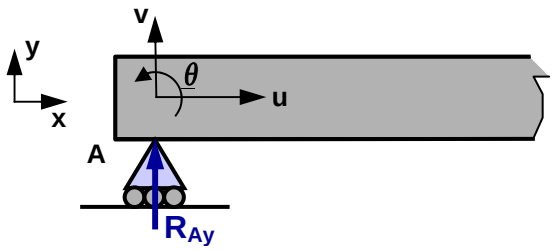
ΣF$_x$ = 0*: bütün yatay kuvvetlerin cebirsel toplamı sıfıra eşit*
ΣF$_y$ = 0: *bütün dikey kuvvetlerin cebirsel toplamı sıfıra eşi;*
ΣM =0: *bütün kuvvetlerin herhangi bir nokta (eksen) etrafındaki momentlerinin cebirsel toplamı sıfıra eşit demektir.*

Bunlar iki boyutlu (düzlem) yapıların statik dengesi için 3 denge denklemi olarak bilinir. Yukarıda denklemlerin sağlanabilmesi için yeterli bağların ve bunlara karşılık gelen mesnet reaksiyonların sağlanması lazımdır. Üç ayrı denklem ile üç bilinmeyenin şiddeti belirlenebilir. Eğer yapı sadece yeterli mesnetlerle bağlanmışsa (3'ten fazla olmayan bilinmeyen reaksiyonlar), yapı yukarıdaki eşitliklerle tamamıyla analiz edilebilir ve statik olarak belirlidir (***İzostatik***). Eğer bilinmeyen sayısı üçten fazla ise, sadece yukarıdaki denklemleri kullanarak çözüm mümkün değildir ve yapı statik olarak belirsizdir (***hiperstatik***). Bu tip problemler, elastik cisim mekaniğinde cisimlerin şekil değiştirmelerine bağlı bilinmeyen sayısı kadar yeni denklem yazılabilirse bilinmeyen tepkiler bulunabilir. İki boyutlu yapılarda üçten az mesnet reaksiyonu varsa, ***eksik bağlıdır.*** Yapı rijit cisim olarak hareket eder. Bir cisim (yapı) üç yada daha çok noktadan bağlı olmasına rağmen yukarıdaki denklemlerden birini sağlamıyorsa böyle sistemlere ***yetersiz bağlı*** sistemler denir.

4.2 MESNETLER VE MESNET REAKSİYONLARI

4.2.1 Kayıcı Mesnetler

Sadece bilinmeyen bir reaksiyon sağlar ve hareket yönüne pozitif bir açı ile etki eder. Böylece kayıcı mesnetler, bir doğrultuda lineer harekete ve dönmeye müsaade ederler.

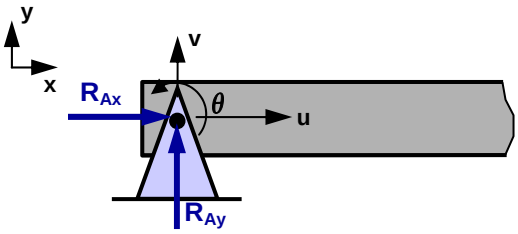


Şekil 4.3: Kayıcı Mesnet

Şekil 4.3'den de anlaşılacağı üzere, y yönünde deplasman yoktur yani sıfırdır ama y yönünde bir tepki kuvveti R_{Ay} meydana gelir.

4.2.2 Sabit Mesnetler

Tek noktada sabitlenmiş mesnetler yatay ve düşeyde iki reaksiyon verir dolayısıyla iki yönde cismin hareketine engel olur. Fakat dönmeyi sağlar.

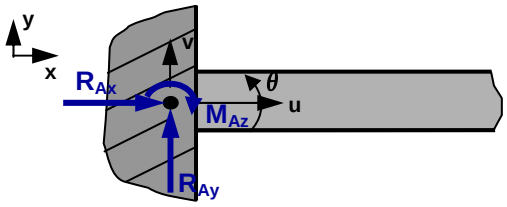


Şekil 4.4: Sabit Mesnet

x ve y yönünde yer değiştirmeler sıfıra eşitken, x ve y yönünde reaksiyon kuvvetleri R_{Ax}, R_{Ay} meydana gelir. $\theta \neq 0$ olduğunda $M_A = 0$ olmaktadır.

4.2.3 Ankastre (Konsol) Mesnetler

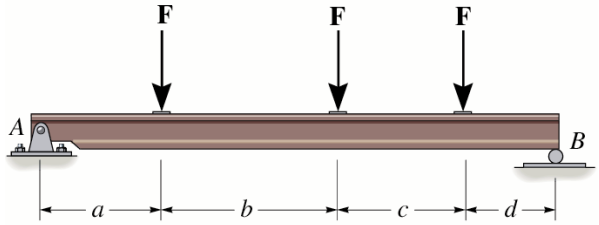
Yönü ve şiddeti bilinmeyen iki reaksiyon ve momenti sağlar (toplam üç bilinmeyen). Böyle bir mesnet iki doğrultuda lineer hareketi ve bir eksen etrafında dönmeyi engeller.



Şekil 4.5: Ankastre Mesnet

Burada ise $x = y = \theta = 0$ 'dır ve $R_{Ax} \neq R_{Ay} \neq M_A \neq 0$ olmaktadır. Bu mesnetlerin birlikte uygulanmasını şekil 4.6'deki gibi görebiliriz.

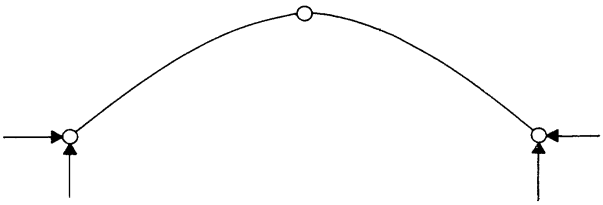




Şekil 4.6: Kayar ve Sabit Mesnet'in Birlikte Uygulanması

4.3 ÜÇ YERDEN PUNTALANMIŞ DÜZLEM YAPILAR

Eğer yapı üç noktadan sabitlenmiş ise (menteşe gibi) (*şekil 4.7*), öyle ki yapının bir parçası diğer parçanın dönmesinden bağımsız olarak pim etrafında dönebiliyor, böylece özel bir çeşit denge eşitliği daha yazılabilir, çünkü pim etrafındaki bütün kuvvetlerin momentleri toplamı sıfır olmalıdır. Bu mesnet reaksiyonunun bilinmeyen bir bileşeninin belirlenmesini sağlar.



Şekil 4.7 Üç yerden puntalanmış kavisli yapı

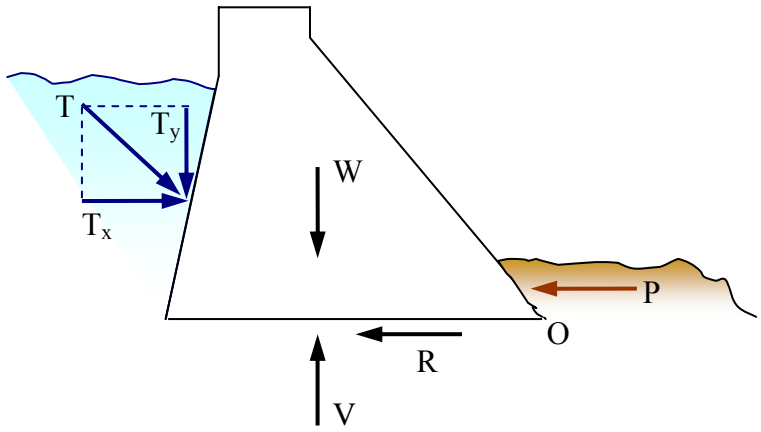
4.4 UZAY YAPILAR

Üç boyutlu bir yapı, uzay yapıdır. Karşılıklı dik yönler, bir uzay yapı için kuvvetlerinin toplamı, sıfır olmalı ve üç tane karşılıklı dikey eksen (x,y ve z) etrafındaki kuvvetlerin momentleri toplamı da sıfır olmalıdır. Bundan dolayı,

$\Sigma Fx = 0$: X yönündeki kuvvetlerin toplamı sıfıra eşittir.
$\Sigma Fy = 0$: Y yönündeki kuvvetlerin toplamı sıfıra eşittir.
$\Sigma Fz = 0$: Z yönündeki kuvvetlerin toplamı sıfıra eşittir.
$\Sigma M_x = 0$: X ekseni etrafındaki momentlerin toplamı sıfıra eşittir.
$\Sigma M_y = 0$: Y ekseni etrafındaki momentlerin toplamı sıfıra eşittir.
$\Sigma M_z = 0$: Z ekseni etrafındaki momentlerin toplamı sıfıra eşittir.

4.4.1 Büyük Yapılar

Yapının, Şekil 4.8'de barajda görüldüğü gibi dengeyi sağlaması kendi ağırlığına bağlıdır. Böylece, denge için,



Şekil 4.8 Baraj duvarı

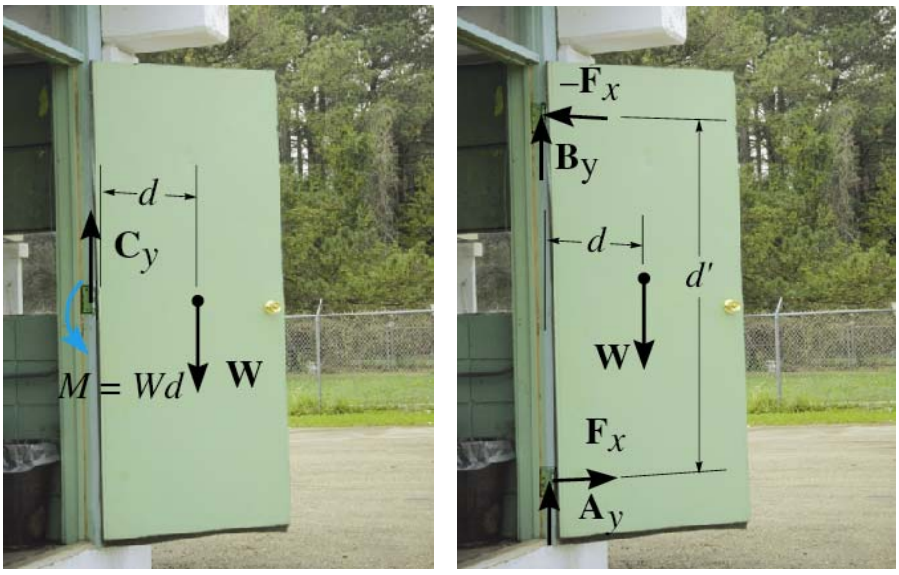
ΣFy = 0: Yapının ağırlığının (W) ve yükün (T) dikey bileşenleri (T_y) yapının altındaki dikey yukarı yöndeki yer tepkisi (V) ile dengelenmelidir.

ΣFx = 0: Yükün (T) yatay bileşeninden (T_x) kaynaklanan doğrusal yöndeki kayma eğilimi, yükün arkasındaki tepki kuveveti (P) ve/veya yer ile yapı arasındaki sürtünme kuvveti (R) tarafından engellenmelidir.

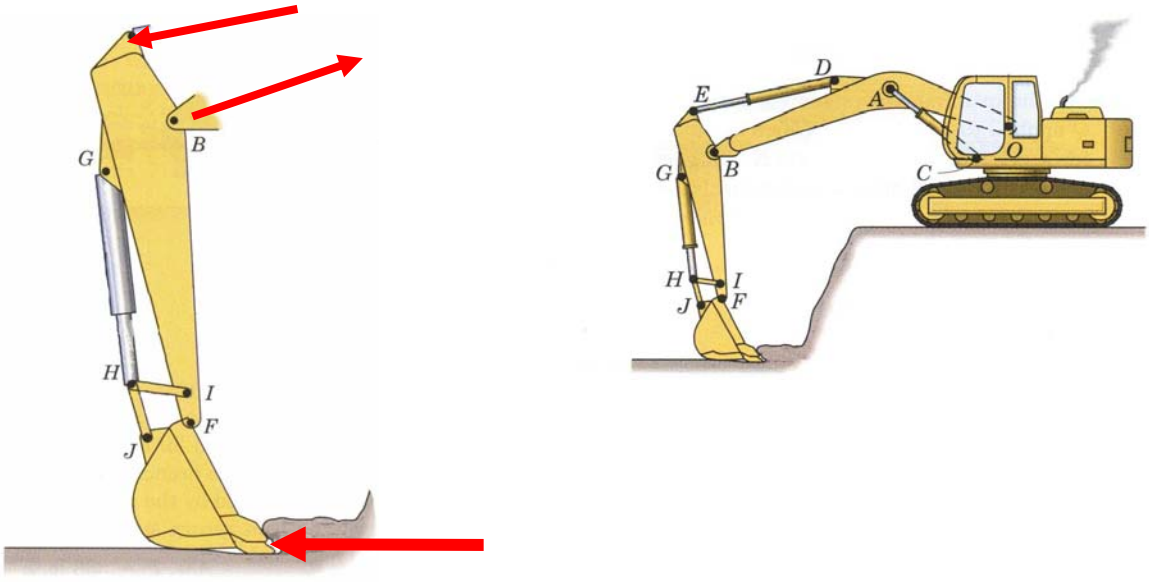
ΣM_0 = 0: Dönme merkezi (O) etrafında yükten kaynaklanan döndürme momenti aynı noktada kendi ağırlığından kaynaklanan yenilenme momenti tarafından dengelenmelidir.

Kütle yapısı döndürmeye karşı güvenlik faktörünü sağlamak için ağırlığı denge için minimum gerekli ağırlıktan daha büyük olacak şekilde dizayn edilmiştir.

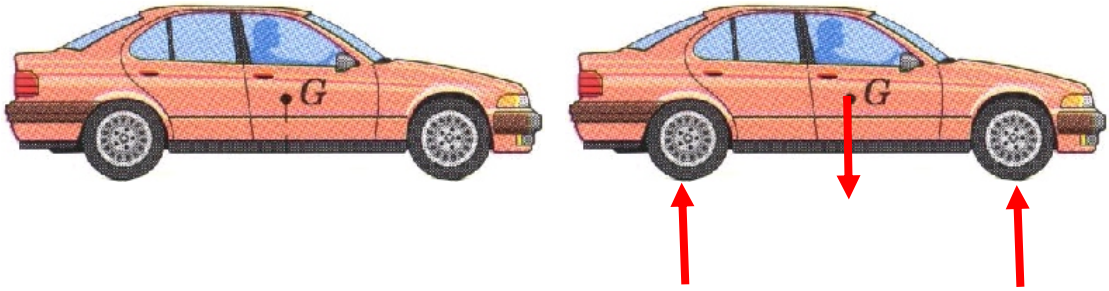
Örnekler;



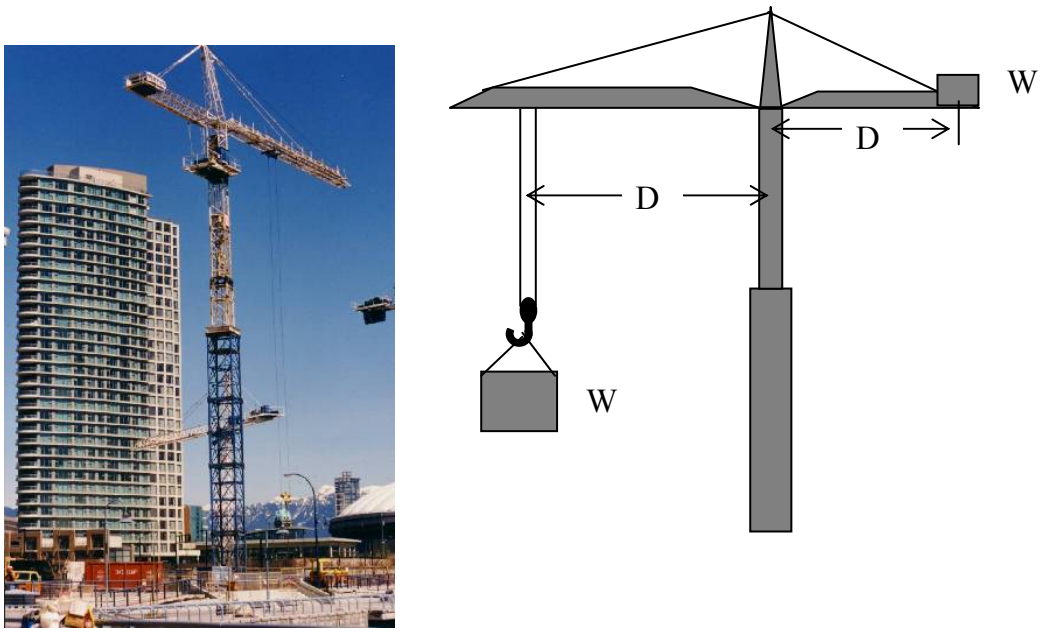
Şekil 4.9: Bir kapıda; a) Tek menteşe olması durumunda gelen kuvvetler b) Çift menteşe olması durumunda meydana gelen kuvvetler



Şekil 4.10: Bir kepçenin çalışması esnasında meydana gelen tepki kuvvetleri

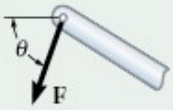
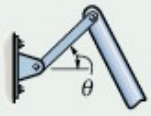
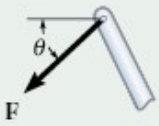
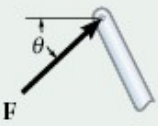
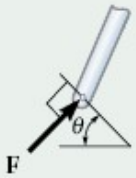
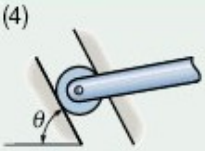
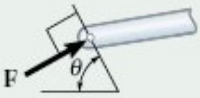
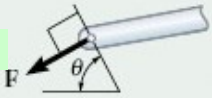
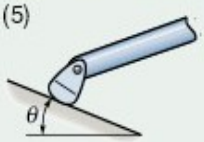
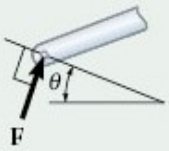
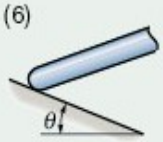
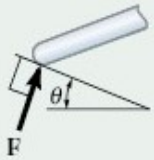
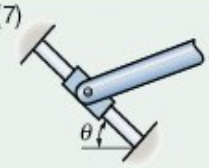
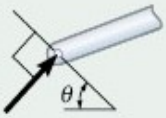
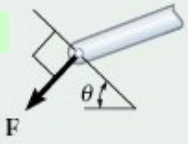


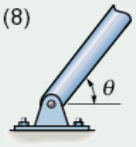
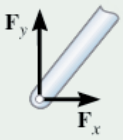
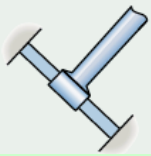
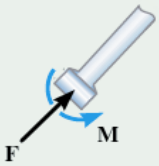
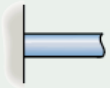
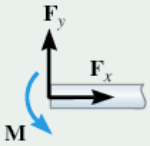
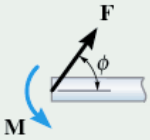
Şekil 4.11: Arabanın dengesi



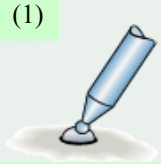
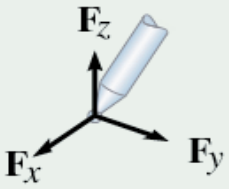
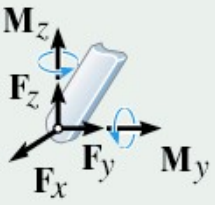
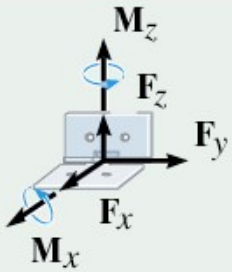
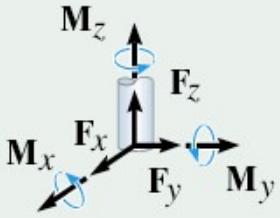
Şekil 4.12: Vinç'te denge sistemi

Tablo 4.1 İki Boyutlu Cisimler için Mesnet ve Bağ Tepkileri

Bağlantı Tipi	Reaksiyon	Bilinmeyen Sayısı
(1)  Kablo		Bir bilinmeyen. Reaksiyon kuvveti çekme kuvvetidir ve bu kuvvet bağlı bulunduğu elemandan itibaren kablo doğrultusundadır.
(2)  Ağırlıksız bağlantı çubuğu	 veya 	Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet bağlantı çubuğu boyunca etki eder.
(3)  Kayıcı Mafsal		Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet temas noktasındaki yüzeye dik olarak etki eder.
(4)  Kayıcı Mafsal	 veya 	Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet yarığa dik olarak etki eder.
(5)  Kayıcı Mafsal		Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet temas noktasındaki yüzeye dik olarak etki eder.
(6)  Pürüzsüz Temas Yüzeyi		Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet temas noktasındaki yüzeye dik olarak etki eder.
(7)  Düz çubuk üzerindeki bileziğe bağlı mafsal	 veya 	Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet çubuğa dik olarak etki eder.

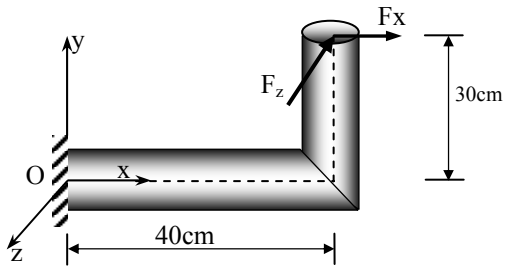
Bağlantı Tipi	Reaksiyon	Bilinmeyen Sayısı
(8)  Mafsal	 veya  	İki bilinmeyen. Reaksiyonlar, iki kuvvet bileşeni veya ϕ doğrultusundaki bir bileşke kuvvettir.(ϕ ve θ açısı 2. bağlantı tipindeki gibi olmadıkça birbirine eşit olmak zorunda değildir.
(9)  Düz bir çubuk üzerinde bileziğe ankastre bağlantı	 	İki bilinmeyen. Reaksiyonlar, kuvvet ve momenttir, ve çubuğa dik olarak etki eder.
(10)  Ankastre mesnet	 veya  	Üç bilinmeyen. Reaksiyonlar, iki kuvvet bileşeni ve momenttir. Veya ϕ doğrultusunda bir bileşke kuvvet ve momenttir.

Tablo 4.2 Üç Boyutlu Cisimler için Mesnet ve Bağ Tepkileri

Bağlantı Tipi	Reaksiyon	Bilinmeyen Sayısı
(1)  Küresel Mafsal		Üç bilinmeyen. Reaksiyonlar, üç kuvvet bileşenidir.
(2)  Radyal Yük taşıyan Yatak		Dört bilinmeyen. Reaksiyonlar, iki kuvvet ve iki de momenttir.
(3)  Döner mafsal		Beş bilinmeyen. Reaksiyonlar, üç kuvvet ve iki de momenttir.
(4)  Menteşe		Beş bilinmeyen. Reaksiyonlar, üç kuvvet ve iki de momenttir.
(5)  Ankastre mesnet		Altı bilinmeyen. Reaksiyonlar, üç kuvvet ve üç de momenttir.

4.5 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1:



O' da doğacak mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.

F_x= 500 N
F_z= 600 N

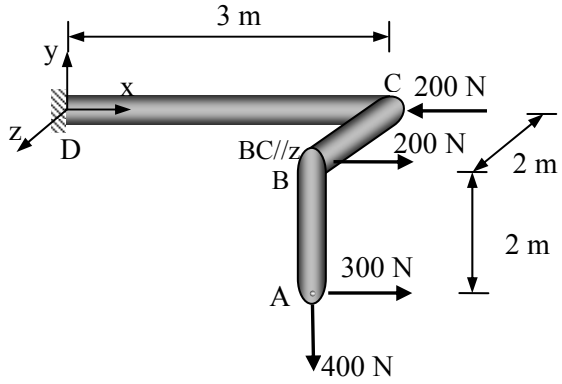
Çözüm:

$$M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 40 & 30 & 0 \\ 500 & 0 & -600 \end{vmatrix}$$

$$M_o = i(-18000-0) - j(-24000-0) + k(0-15000)$$
$$M_o = -18000i + 24000j - 15000k \quad \Rightarrow$$
$$M_{ox} = -18000\ Ncm$$
$$M_{oy} = 24000\ Ncm$$
$$M_{oz} = -15000\ Ncm$$

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow O_x=500N$
$\Sigma F_z=0 \Rightarrow O_z=600N$

Problem 2:



Verilen kolda kuvvetleri ve kuvvet çiftlerini D'ye indirgeyiniz ve D'de doğacak mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.

Çözüm:

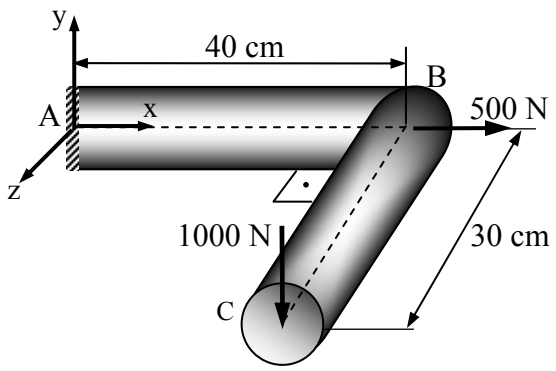
$$M_D = 400j + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \\ 300 & -400 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_D = 400j + i(0+800) - j(0-600) + k(-1200+600)$$

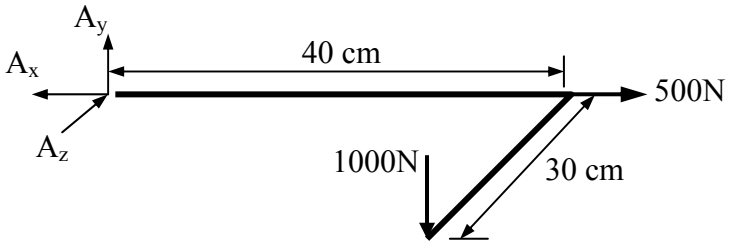
$$M_D = 800i + 1000j - 600k$$

$$D_x = -300N \quad D_y = 400N \quad D_z = 0$$

Problem 3:



A'da doğacak mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.



$\sum F_x = 0$ | $\sum Fy = 0$ | $\sum Fz = 0$

$-A_x+500=0$ | $A_y-1000=0$ | $A_z=0$

$A_x= 500N$ | $A_y= 1000N$

$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_x = 0$

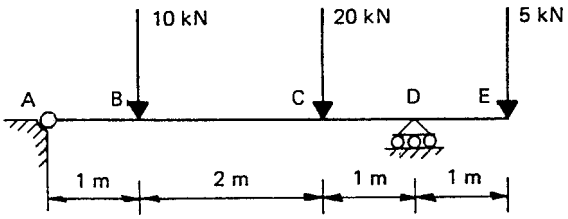
$M_x=1000.30=30000$ Ncm

$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_z = 0$

$M_z=1000.40=-40000$ Ncm

Problem 4:

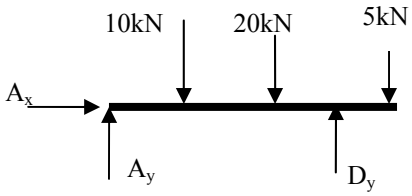
ABCDE kirişini A noktasından sabit bir mesnet ve D noktasında kayıcı bir mesnetle Şekil 4.13'de görüldüğü gibi mesnetlenmiştir. Üç noktadan kuvvetler etki etmektedir. Reaksiyon kuvvetlerini belirleyiniz.



Şekil 4.13: Çıkmalı kiriş yük diyagramı

Çözüm

A da A_x ve A_y gibi iki reaksiyon kuvveti ve D de dikey olarak etkiyen sadece tek bir reaksiyon D_y kuvveti vardır. Bu reaksiyonlar serbest kuvvet diyagramında gösterilmiştir (Şekil 4.14). Sadece üç bilinmeyen vardır; burdan sistem statik olarak belirlidir ve bilinmeyenler belirlenebilir.



Şekil 4.14: Serbest kuvvet diyagramı

Yatay yük yoktur; bundan dolayı,

$\sum F_x = 0$ *ise* $A_x = 0$

(1) D_y'yi belirlemek için A etrafında momentler alınır:
($\Sigma M_A = 0$)

$$-(10 \times 1) - (20 \times 3) - (5 \times 5) + (D_y \times 4) = 0$$

$$\mathbf{D_y = +23.75\ kN}$$

(2) A_y'yı belirlemek için
($\Sigma F_y = 0$)

$$+A_y + D_y - 10 - 20 - 5 = 0$$

$$+A_y + (23.75) - 35 = 0$$

$$\mathbf{A_y = +11.25\ kN}$$

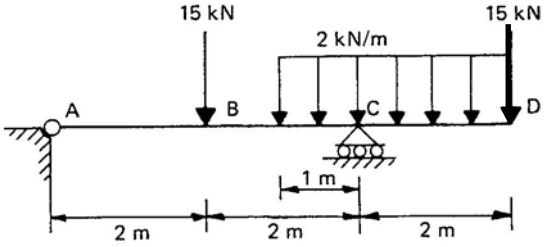
(3) D etrafında alınan momentler kontrol edilir:

$$\Sigma M_D = +(Ay \times 4) - (10 \times 3) - (20 \times 1) + (5 \times 1)$$

$$= +(+11.25 \times 4) - 45 = 45 - 45 = 0$$

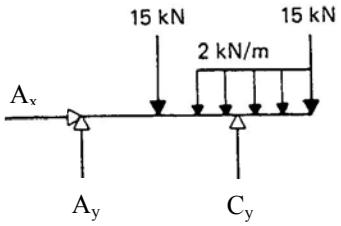
Problem 5:

ABCD kirişi A'da sabit bir mesnede ve C'de kayıcı bir mesnede sahiptir. Şekil 4.15'de gösterildiği gibi, kiriş, herbiri 15 kN olan iki tekil yük ve 2 kN/m lineer yayılı olan yüke maruzdur. Reaksiyonları belirleyiniz.



Şekil 4.15: Çıkmalı kiriş yük diyagramı

Çözüm:



Şekil 4.16 Serbest kuvvet diyagramı

$\sum F_x = 0$ *ise* $A_x = 0$ Yatayda yük yoktur.

C_y'yi belirleyelim;
A etrafındaki momentleri alalım: *yayılı yükün momenti*, (2 x 3 = 6 kN) x(4.5 m) dir.

($\Sigma M_A = 0$)

$$- (15 \times 2) + (C_y \times 4) - (2 \times 3 \times 4{,}5) - (15 \times 6) = 0$$

$$\mathbf{C_y = +36.75\ kN}$$

A_y'yı belirleyelim;
($\Sigma F_y = 0$)

$$+ A_y - 15 + C_y - (2 \times 3) - 15 = 0$$
$$+ A_y - 15 + (+36.75) - 6 - 15 = 0$$

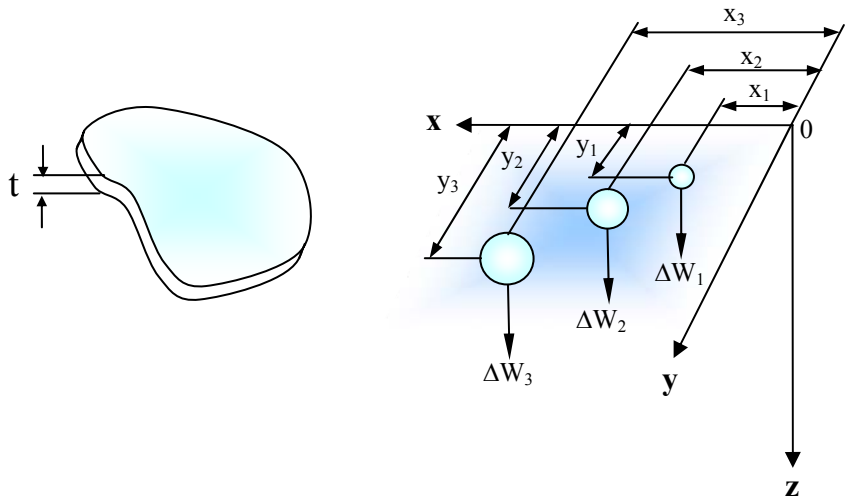
$$\mathbf{A_y = -0.75\ kN}$$

BÖLÜM 5
İKİ BOYUTLU CİSİMLERİN AĞIRLIK MERKEZLERİ

5.1 GİRİŞ VE TANIM

Ağırlık kuvvetlerinin bileşkelerine cismin ağırlığı, ve bu kuvvetlerinin bileşkesinin tatbik noktasına cismin ağırlık merkezi denir. Dünyanın katı bir cisme tatbik ettiği yer çekim kuvvetleri dünyanın merkezine yöneliktir. Bu kuvvetleri çok büyük bir yaklaşıkla paralel kuvvetler olarak ele alınabilir. Mühendislikte bir cisme uygulanan ağırlık kuvvetlerinin veya bazı sebeplerle tatbik edilen kuvvetlerin bileşkesinin tatbik noktalarının bilinmesi gerekmektedir.

$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + ... + .\Delta W_n$



Şekil 5.1 Ağırlık kuvvetleri

Ağırlık kuvvetlerinin bileşkesinin tatbik noktası, bu kuvvetlerinin eksenlere göre momentlerini, bileşkenin momentine eşitleyerek bulunur. Böylece $\Delta W_1 + \Delta W_2 + ... + \Delta W_n$ gibi n tane paralel kuvvetin yerine eşleniği konulmuş olur. Kuvvetler z eksenine paralel oldukları için bu eksene göre momentleri yoktur.

$xW = x_1\Delta w_1 + x_2\Delta W_2 + ... + x_n\Delta W_n$ $\qquad xW = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta W_i \qquad x = \frac{1}{W}\int x.dW$

$yW = y_1\Delta w_1 + y_2\Delta W_2 + ... + y_n\Delta W_n$ $\qquad yW = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta W_i \qquad y = \frac{1}{W}\int y.dW$

Eğer iki boyutlu cisim düzgün kalınlıklı bir plak ise burada kalınlığın diğer boyutlardan çok küçük olma şartı vardır. Bu durumda ağırlık kuvveti $\Delta W = \gamma.t.\Delta A$ γ (özgül ağırlık), t (kalınlık), ΔA (alan), şeklinde ifade edilebilir.

Toplam ağırlık;

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \gamma.t.\Delta A_1 + \gamma.t.\Delta A_2 + \ldots\ldots\ldots + \gamma.t.\Delta A_n = \gamma.t\,(\Delta A_1 + \Delta A_2 + \ldots\ldots\ldots + \Delta A_n) = \gamma.t.A$$

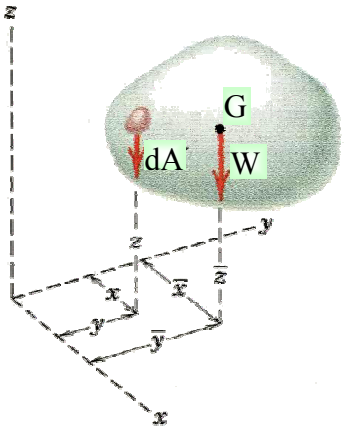
Eksenlere göre momentleri yazalım ;

$$x.\gamma.t.\Delta A = \gamma.t \sum_{i=1}^{n} x_i A_i = \gamma.t\,(x_1.A_1 + x_2.A_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n.A_n)$$

$$x.A = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i = x_1.A_1 + x_2.A_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n.A_n$$

Kütle Merkezi;

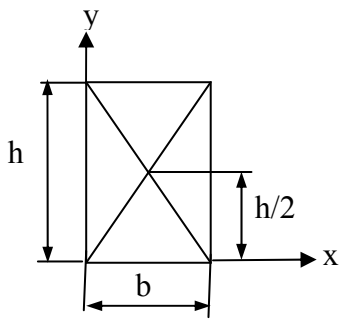
$$x = \frac{1}{A}\int x.dA \quad \text{benzer şekilde} \quad y = \frac{1}{A}\int y..dA$$



Şekil 5.2 Kütle merkezi

$$S_x = \int y.dA \qquad S_y = \int x.dA$$

Burada $\int x.dA$'ya alanın y eksenine göre statik momenti veya y eksenine göre birinci momenti denir. $\int y.dA$ da alanın x eksenine göre statik momenti yada birinci momentidir.

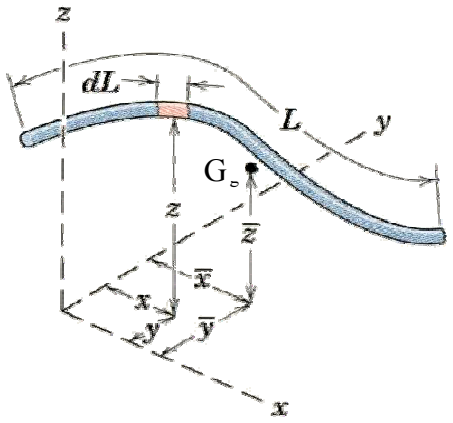


A = b.h

$x = \frac{b}{2}$ $y = \frac{h}{2}$

Ağırlık merkezinin yeri; cisimde bir simetri ekseni varsa ağırlık merkezi bu eksen üzerindedir. Eğer iki simetri ekseni varsa simetri eksenlerinin kesim noktası ağırlık merkezidir.

Çubuğun Ağırlık Merkezi;



Şekil 5.3 Çubuğun ağırlık merkezi

$$\Delta W = \gamma . a . \Delta L$$

a = Telin kesit alanı

γ = özgül ağılık

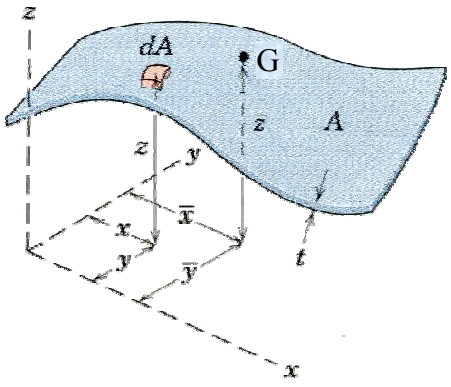
ΔL = Telin küçük parçasının boyu

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \Delta L_1 + \Delta L_2 + ... + \Delta L_n$$

$$\Sigma M_y = o \qquad x.L = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta L_i \qquad x = \frac{1}{L}\int x_i dL$$

$$\Sigma M_x = o \qquad y.L = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta L_i \qquad y = \frac{1}{L}\int y_i dL$$

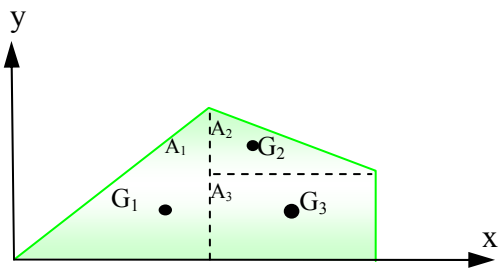
Alanın Ağırlık Merkezi;



Şekil 5.4 Alanın ağırlık merkezi

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dA}{A}$$

5.2 BİRLEŞİK ALANLARIN AĞIRLIK MERKEZİ



$G_1 = (x_1 , y_1)$
$G_2 = (x_2 , y_2)$
$G_3 = (x_3 , y_3)$

Birleşik alan öncelikle kendisini meydana getiren geometrisi bilinen küçük alanlara ayrılır. Her bir alanın ağırlık kuvveti bu alanın ağırlık merkezinde bulunmasından hareketle tüm cismin ağırlık merkezi bulunabilir.

$$W = W_1 + W_2 + W_3 ,$$

$$\overline{x}.W = x_1.W_1 + x_2.W_2 + x_3.W_3$$

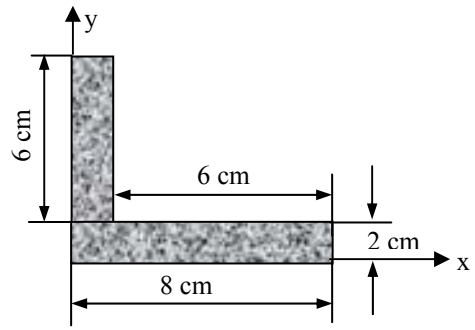
$$\overline{y}.W = y_1.W_1 + y_2.W_2 + y_3.W_3$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\overline{x}A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$$

$$\overline{x} = \frac{x_1A_1 + X_2A_2 + X_3A_3}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_I A_i}{\sum_{i=1}^{n} A} \qquad \overline{y} = \frac{y_1.A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_I A_i}{\sum_{i=1}^{n} A}$$

Örnek 5.1



Ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

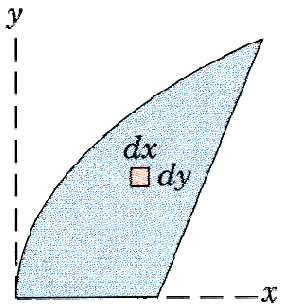
$$\overline{x} = \frac{x_1A_1 + X_2A_2}{A} = \frac{1.(12) + 4.(16)}{28} = \frac{76}{28} = 2{,}71\,\text{cm}$$

$$\overline{y} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2}{A} = \frac{5.(12) + 1.(16)}{28} = \frac{76}{28} = 2{,}71\,\text{cm}$$

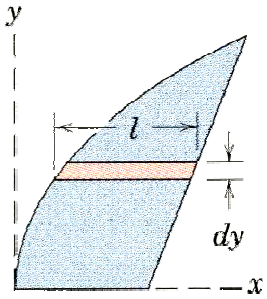
5.3 AĞIRLIK MERKEZİNİN İNTEGRASYONLA BULUNMASI

Mühendislikte analitik olmayan eğrilerle çevirili yüzeylerin ağırlık merkezleri, kendisini oluşturan küçük üçgen, dikdörtgen, kare...vb. elemanlara ayrılarak bunların alanlarının toplamlarından hareketle yüzeyin ağırlık merkezi yaklaşık olarak bulunabilir. Eğer yüzeyi çevreleyen eğriler analitik reel fonksiyon ise yüzeyin ağırlık merkezi integralle bulunabilir. Yüzey üzerindeki diferansiyel mertebedeki alan elemanı: dA = dx.dy alınarak buradan çift katlı integralle ağırlık merkezinin koordinatları bulunabilir. Mühendisliğe daha uygun bir çözüm ise diferansiyel mertebede ince dikdörtgen kesitler tek katlı integralle alanlar ve ağırlık merkezleri bulunabilir.

Eğri altında kalan alanın hesaplanması;

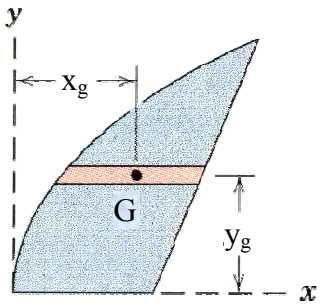


dA = dx dy



dA = l dy

Taralı alanın ağırlık merkezinin integral ifadesi;

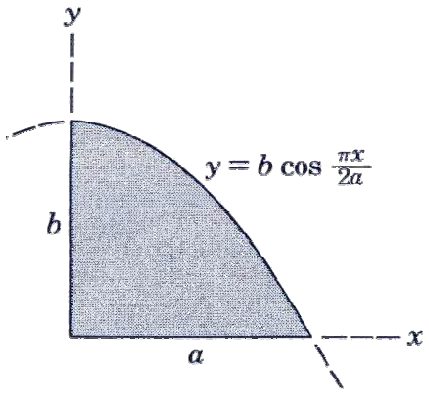


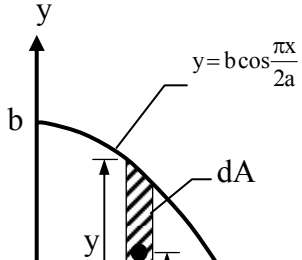
$$\bar{x} = \frac{\int x_g \, dA}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_g \, dA}{A}$$

Örnek 5.2

Taralı alanın ağırlık merkezinin bulunması,





$$A = \int dA, \qquad burada \; dA = y\,dx$$

$$= \int_0^a y\,dx = \int_0^a b\cos\frac{\pi x}{2a}\,dx$$

$$= b\left[\frac{2a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2a}\right]_0^a$$

$$= \frac{2ab}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$A = \frac{2ab}{\pi}$$

$$\bar{y}A = \int y_g\,dA = \int_0^a y_g\,(y\,dx) = \int_0^a \frac{y}{2}(y\,dx) = \frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a b^2\cos^2\frac{\pi x}{2a}\,dx = \frac{b^2}{2}\left[\frac{x}{2} + \frac{a}{2\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\right]_0^a = \frac{b^2}{2}\left[\left(\frac{a}{2}+0\right) - (0+0)\right]_0^a$$

$$= \frac{a\,b^2}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{ab^2}{4A} = \frac{ab^2}{4}\left(\frac{\pi}{2ab}\right) = \frac{\pi b}{8}$$

$$\bar{x}A = \int x_g\,dA = \int_0^a x_g\,(y\,dx) = \int_0^a x\,(b\cos\frac{\pi x}{2a}\,dx)$$

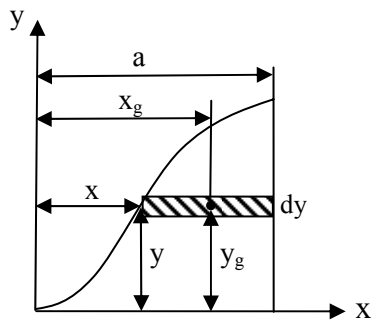
$$= b\int_0^a x\cos\frac{\pi x}{2a}\,dx = b\left[\frac{4a^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2a} + \frac{2a}{\pi}x\sin\frac{\pi x}{2a}\right]_0^a = b\left[\frac{4a^2}{\pi^2}(0-1) + \frac{2a}{\pi}(a-0)\right]$$

$$= \frac{4a^2b}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

$$\bar{x} = \frac{4a^2b}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(\frac{\pi}{2ab}\right)$$

$$= \frac{2a}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = a\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$$

Örnek 5.3



$dA = (a - x)\, dy$

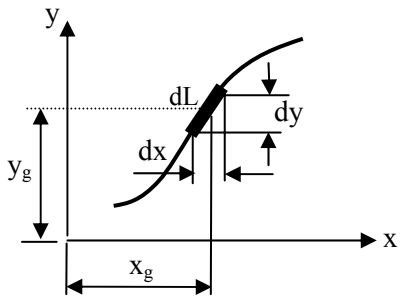
$x_g = \frac{a-x}{2} + x = \frac{a+x}{2}$

$y_g = y$

$x.A = \int x_g dA$

$y.A = \int y_g dA$

Örnek 5.4



$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ dx parantezine alarak

$x_g = x$

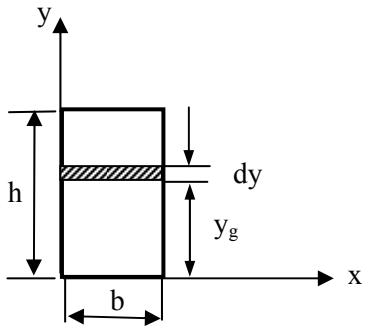
$y_g = y$

$dL = \sqrt{1 + y'^2}\, .dx$

$x.L = \int x.dL$, $L = \int dL$

$y.L = \int y.dL$

Örnek 5.5
Dikdörtgenin ağırlık merkezini integral yardımıyla bulunması,



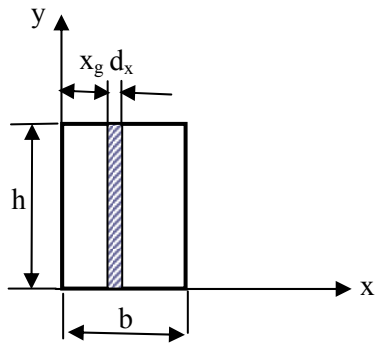
$y.A = \int y_g .dA$

$y.b.h = \int y.b.dy$

$y.b.h = b.\ \frac{y^2}{2}\Big|_0^h$

$y.b.h = \frac{b.h^2}{2}$

$y = \frac{h}{2}$



$$x.b.h = \int_0^b x.dA \qquad dA = h.dx$$

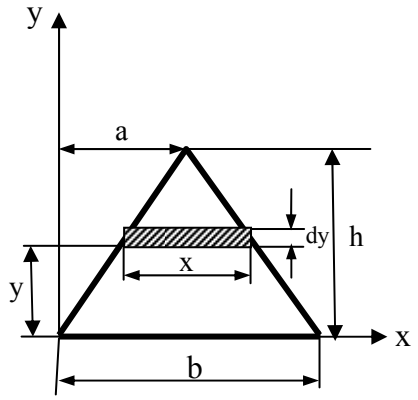
$$x.b.h = \int_0^b x.h..dx$$

$$x.b.h = h.\frac{x^2}{2}\Big|_0^b$$

$$x = \frac{b}{2}$$

Örnek 5.6

Üçgenin ağırlık merkezini integral yardımıyla bulunması,



$$dA = x.dy \qquad y.A = \int y.dA$$

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad y.\frac{b.h}{2} = \int y.xdy$$

$$x = \frac{b.(h-y)}{h} \qquad y\frac{b.h}{2} = \int_o^h y.\frac{b}{h}(h - y).dy$$

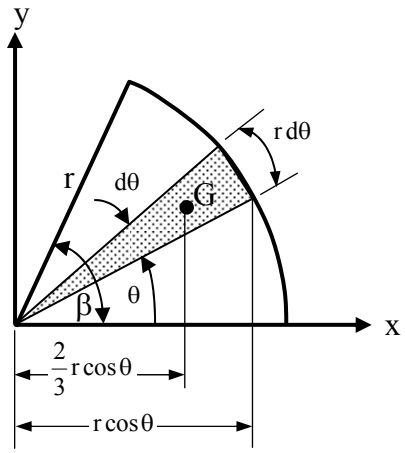
$$y\frac{b.h}{2} = \frac{b}{h}\int_o^h (hy - y^2).dy$$

$$y = \frac{h}{3}$$

Örnek 5.7

Çeyrek dairenin ağırlık merkezini integral yardımıyla bulunması,

Çeyrek daire için β açısı 0^0 ile 90^0 arasındadır.



$$dA = \frac{1}{2}(r\,d\theta)(r) = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$A = \int dA = \int_0^\beta \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}r^2[\theta]_0^\beta = \frac{1}{2}r^2[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$$

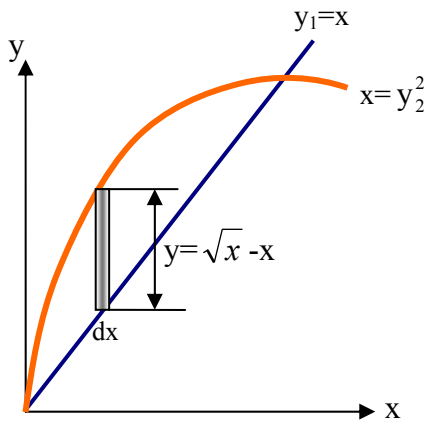
.

$$\bar{x}\,A \;=\; \int x_g\,dA \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}r\cos\theta\right)\left(\frac{1}{2}r^2 d\theta\right) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}r^3\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{r^3}{3}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{r^3}{3}\left[\sin\frac{\pi}{2} - 0\right] \;=\; \frac{r^3}{3}$$

$$\bar{x} \;=\; \left(\frac{r^3}{3}\right)\left(\frac{4}{\pi r^2}\right) \;=\; \frac{4r}{3\pi}$$

İki eğri arasında kalan alanın ve ağırlık merkezinin hesabı;



dA=ydx=($\sqrt{x}$ -x)dx

$y_1=y_2$

x=$\sqrt{x}$

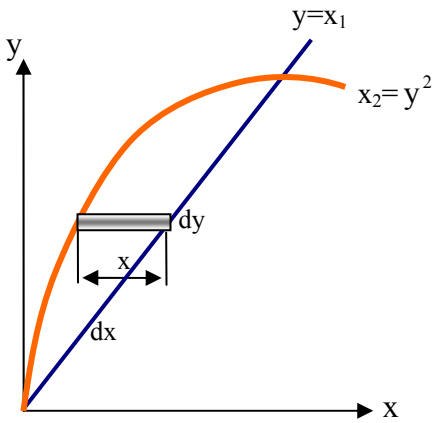
x^2-x=0

x(x-1)=0

x_1=1, x_2=0

$$A\bar{x} = \int x\,dA$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^1 x(\sqrt{x}-x)\,dx}{\int_0^1 (\sqrt{x}-x)\,dx} = \frac{\int_0^1 x(x^{\frac{1}{2}}-x)\,dx}{\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}}-x)\,dx} = \frac{2}{5}$$



dA=xdy=($y-y^2$)dy

$x_1=x_2$

$y=y^2$

y(y-1)=0

y_1=1, y_2=0

$$A\bar{y} = \int y dA$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{\int_0^1 y(y - y^2)dy}{\int_0^1 (y - y^2)dx} = \frac{\int_0^1 (y^2 - y^3)dy}{\int_0^1 (y - y^2)dy} = \frac{1}{2}$$

5.5 DÖNEL CİSİMLER (PAPPUS GULDİN TEOREMLERİ)

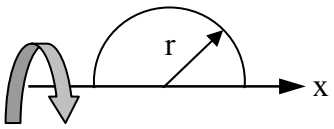
Teorem.1: Bir düzlem eğrinin kendi düzlemi içinde fakat kendini kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı eğrinin uzunluğuyla dönme sırasında ağırlık merkezinin kat ettiği yolun çarpımına eşittir.

$A = 2\pi y_g L$

$dA = 2\pi y_g dL$

$A = 2\pi . \int y_g dL$

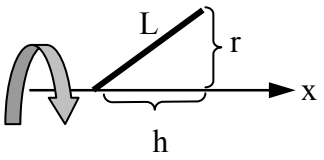
Örnek 5.8 Yarım çember yayından küre yüzey alanının elde edilmesi



$$A = 2\pi \frac{4r}{3\pi} . \pi . r$$

$$A = \frac{8}{3} \pi . r^2$$

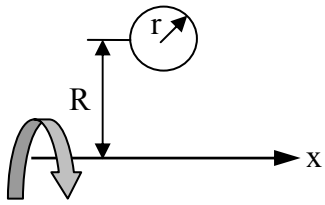
Örnek 5.9 Eğik bir doğrunun x ekseni etrafında döndürülmesi ile koni yüzey alanının hesabı



$$A = 2\pi . \frac{r}{2} . L \quad \text{(koni)}$$

$$A = \pi . r . L$$

Örnek 5.10 Çemberden tor yüzey alanının hesabı

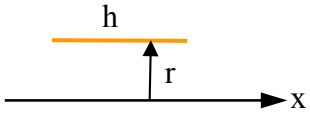


$$A = 2\pi . 2\pi . R \quad \text{(tor)}$$

$$A = 4\pi^2 . r . R$$

Örnek 5.11 X eksenine paralel bir doğrudan silindir yüzey alanının elde edilmesi

$$A = 2\pi . r . h \quad \text{(silindir)}$$

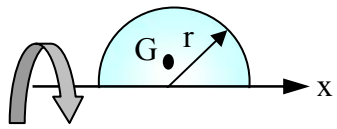


Teorem 2: Düzlem bir yüzeyin kendi düzlemi içinde, fakat kendini kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi, yüzeyin alanıyla dönme sırasında yüzeyin ağırlık merkezinin kat ettiği yolun çarpımına eşittir.

$V = 2\pi y_g A$

$dV = 2\pi y_g L \qquad V = 2\pi \int y_g dA$

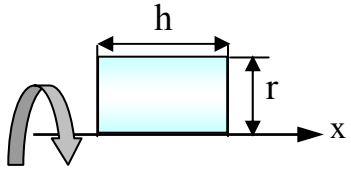
Örnek 5.12 Yarım daireden kürenin hacminin hesabı



$$V = 2\pi \frac{4r}{3\pi}.\frac{\pi.r^2}{2} \qquad (\text{küre})$$

$$V = \frac{4.\pi.r^3}{3}$$

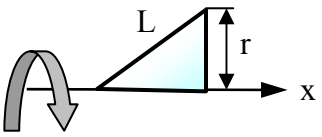
Örnek 5.13 Dikdörtgenden dolu silindirin hacminin hesabı



$$V = 2\pi.\frac{r}{2}.h.r$$

$$V = \pi.r^2.h$$

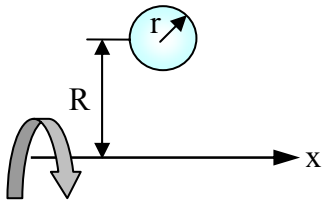
Örnek 5.14 Üçgenden koni hacminin hesabı



$$V = 2\pi \frac{r}{3}.\frac{r.h}{2}$$

$$V = \frac{\pi.r^2 h}{3}$$

Örnek 5.15 Dolu daireden R yarıçaplı torun hacminin hesaplanması

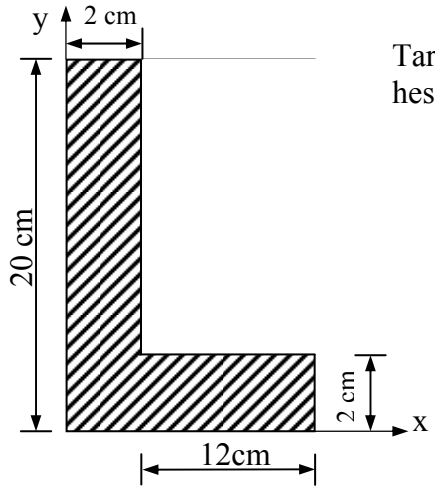


$$V = 2\pi.R.\pi.r^2$$

$$V = 2\pi^2.r^2.R$$

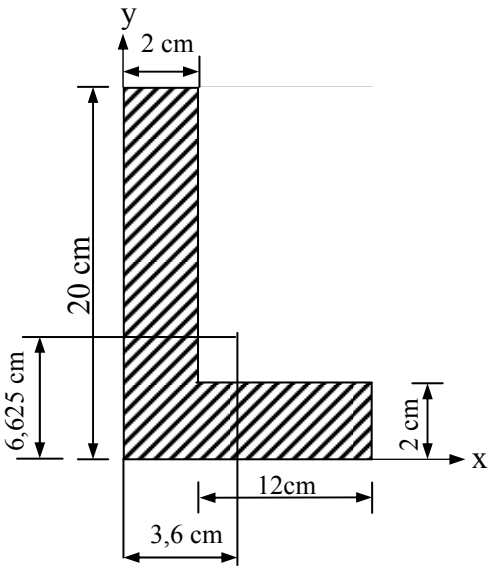
5.5 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1)



Taralı alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

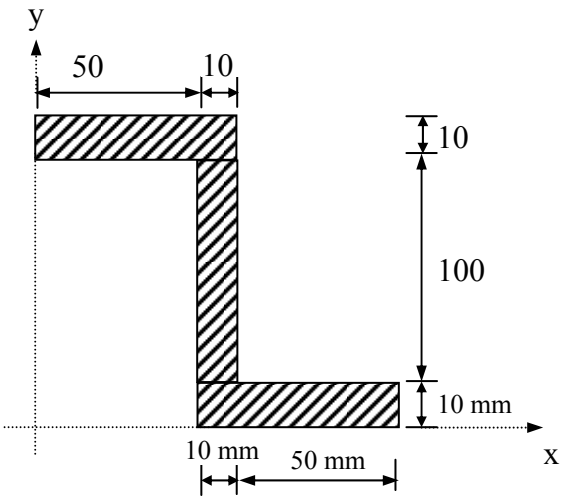
Çözüm:



$$\overline{X} = \frac{A_1.x_1 + A_2.x_2}{A_1 + A_2} = \frac{40.1 + 24.8}{64} = 3{,}625cm$$

$$\overline{Y} = \frac{A_1.y_1 + A_2.y_2}{A_1 + A_2} = \frac{40.10 + 24.1}{64} = 6{,}625cm$$

Problem 2)



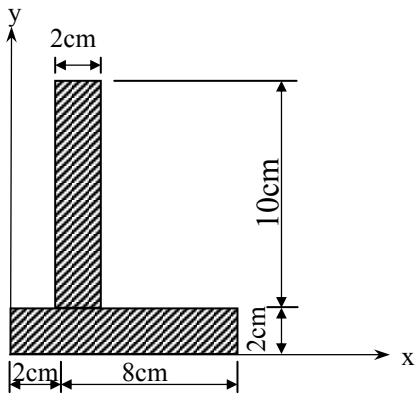
Taralı alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\overline{X} = \frac{x_1.A_1 + x_2.A_2 + x_3.A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{30.(60.10) + 55.(10.100) + 80.(10.60)}{600 + 1000 + 600} = 55\ mm$$

$$\overline{Y} = \frac{y_1.A_1 + y_2.A_2 + y_3.A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{115.(60.10) + 60.(10.100) + 5.(10.60)}{600 + 1000 + 600} = 60\ mm$$

Problem 3)



Taralı alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

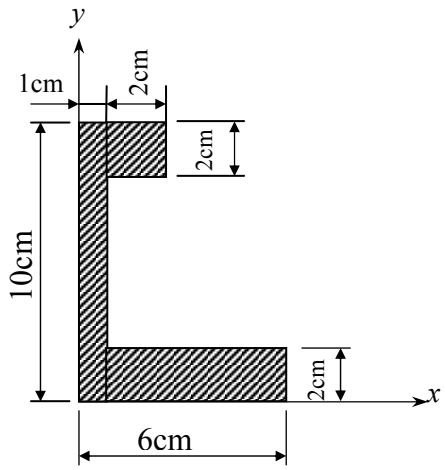
Çözüm:

	x	***y***	***A***	***Ax***	***Ay***
1	*3*	*7*	*20*	*60*	*140*
2	*5*	*1*	*20*	*100*	*20*
Toplam			*40*	*160*	*160*

$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{160}{40} \Rightarrow \bar{x} = 4\ cm$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{160}{40} \Rightarrow \bar{y} = 4\ cm$$

Problem 4)



Taralı alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

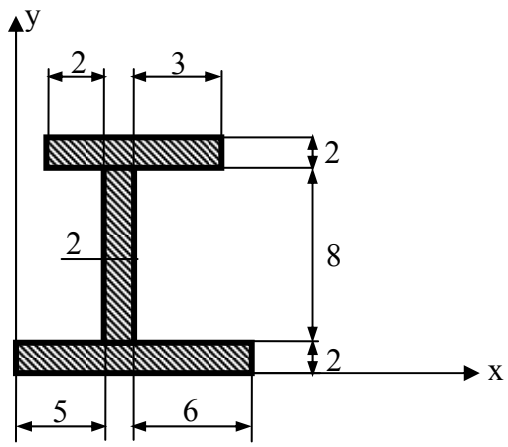
Çözüm:

	x	*y*	*A*	*xA*	*yA*
1	*0,5*	*5*	*10*	*5*	*50*
2	*2*	*9*	*4*	*8*	*36*
3	*3,5*	*1*	*10*	*35*	*10*
	Toplam		*24*	*48*	*96*
			ΣA	*ΣxA*	*ΣyA*

$$\bar{x} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A} = \frac{48}{24} = 2\,\text{cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma yA}{\Sigma A} = \frac{96}{24} = 4\ \text{cm}$$

Problem 5)



Verilen profil kesitte ağırlık merkezini, yerini hesaplayınız. (ölçüler cm'dir)

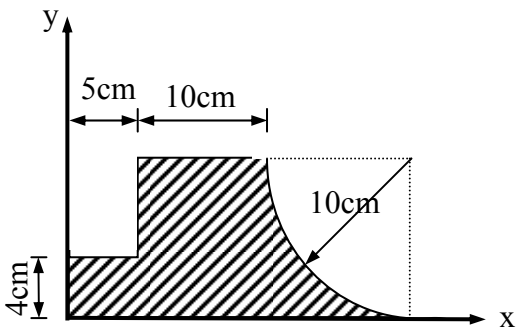
Çözüm:

	A	***x***	***y***	***Ax***	***Ay***
1	*14*	*6,5*	*11*	*91*	*154*
2	*16*	*6*	*6*	*96*	*96*
3	*26*	*6,5*	*1*	*169*	*26*
	56			*356*	*276*

$$\bar{x} = \frac{356}{56} = 6{,}35\,cm$$

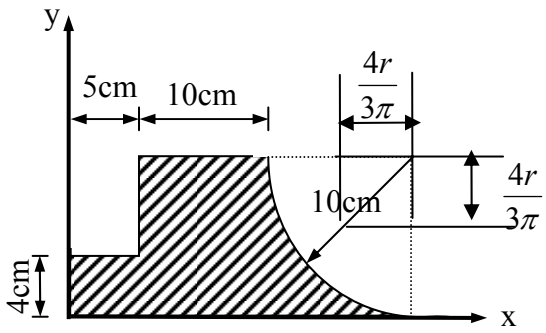
$$\bar{y} = \frac{276}{56} = 4{,}92\,cm$$

Problem 6)



Taralı alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

Çözüm:

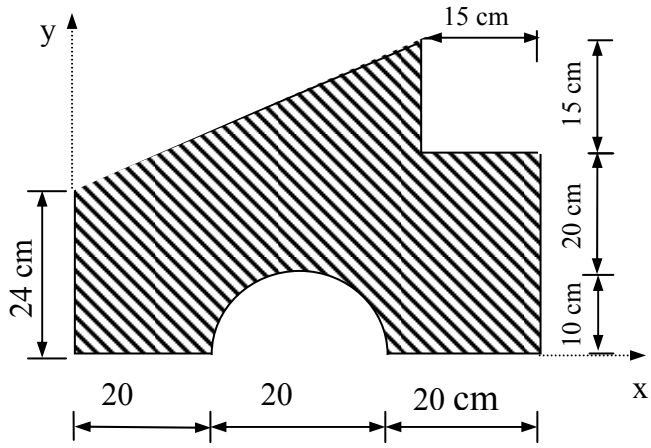


	X	***Y***	***A***	***X.A***	***Y.A***
1	*12,5*	*5*	*250*	*3125*	*1250*
2	*2,5*	*7*	*-30*	*-75*	*-210*
3	*20,76*	*5,76*	*-78,53*	*-1630,28*	*-452,33*
Toplam			*141,47*	*1419,72*	*587,67*

$$\overline{X} = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{1419,72}{141,47} = 10,03 cm$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum y.A}{\sum A} = \frac{587,67}{141,47} = 4,15\ cm$$

Problem 7)



Verilen şeklin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

	X	***Y***	***A***	***X.A***	***Y.A***
1	*30*	*22,5*	*2700*	*81000*	*60750*
2	*15*	*38*	*-472,5*	*-7087,5*	*-17955*
3	*52,5*	*37,5*	*-225*	*-11812,5*	*-8437,5*
4	*30*	*4,24*	*-157,08*	*-4712,4*	*-666*
Toplam			*1845,42*	*57387,6*	*33691,5*

$$\overline{X} = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{57387,6}{1845,42} = 31,09\,cm$$

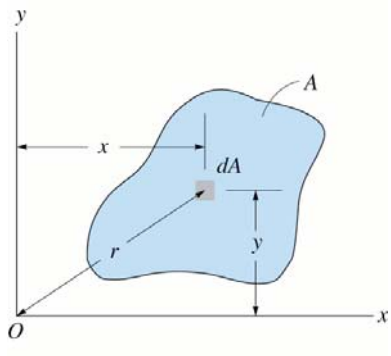
$$\overline{Y} = \frac{\sum y.A}{\sum A} = \frac{33691,5}{1845,42} = 18,25cm$$

BÖLÜM 6

ALAN ve KÜTLE ATALET MOMENTLERİ

6.1 GİRİŞ VE TANIM

Atalet; direnim, karşı koyma anlamına gelmektedir. Bir cismin atalet momenti geometrik olarak dizaynda cismin (eğilme, burulma vb.) zorlanmalara karşı direncinin bir ölçütüdür.



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$J_O = I_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

Şekil: 6.1

$I_x = \int y^2 dA \longrightarrow$ *A alanının x ekseni etrafında atalet momenti (ikinci momenti)*

$I_y = \int x^2 dA \longrightarrow$ *A alanının y ekseni etrafında atalet momenti*

$I_O = \int r^2 dA \longrightarrow$ *A alanının kutupsal atalet momenti*

$I_{xy} = \int xydA \longrightarrow$ *A alanının çarpım atalet momenti*

$$I_o = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y = I_o$$

I_x , I_y ve I_o her zaman pozitiftir, I_{xy} $\pm$ olabilir. I_x , I_y ,I_o , $I_{xy} = (L^4) \longrightarrow$ m^4, cm^4 , mm^4'dür.

6.1.1 ATALET YARI ÇAPLARI

$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} > 0$ I_x *için atalet yarı çapı*

$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} > 0$ I_y *için atalet yarı çapı*

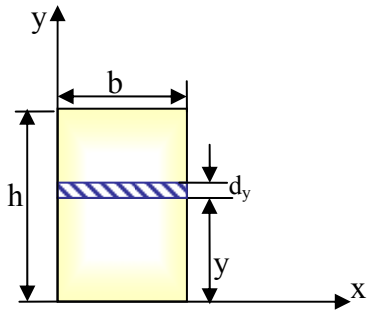
I_{xy} *için atalet yarıçapı yoktur.*

$i_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}} > 0$ I_o *için atalet yarı çapı*

$i_o = \sqrt{\frac{I_x}{A} + \frac{I_y}{A}} = \sqrt{i_x^2 + i_y^2}$

$i_x , i_y , i_o > 0$ (L) (mm,cm,m)

Örnek 6.1: Dikdörtgenin tabanından geçen eksene göre atalet momenti



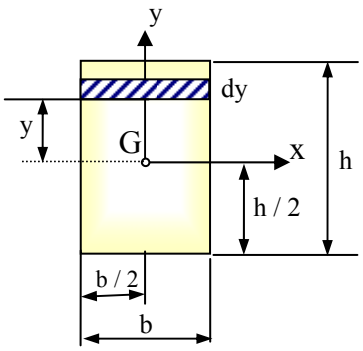
$dA = b.dy$

$I_x = \int y^2 dA = b.\int_0^h y^2 dy = \frac{b.h^3}{3}$

$I_x = \frac{b.h^3}{3}$

$I_y = \frac{h.b^3}{3}$

Örnek 6.2: Dikdörtgenin ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti



$I_x = \int y^2 dA \quad dA = b.dy$

$I_x = b.\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b.\frac{y^3}{3}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$

$I_x = \frac{b.h^3}{12}$

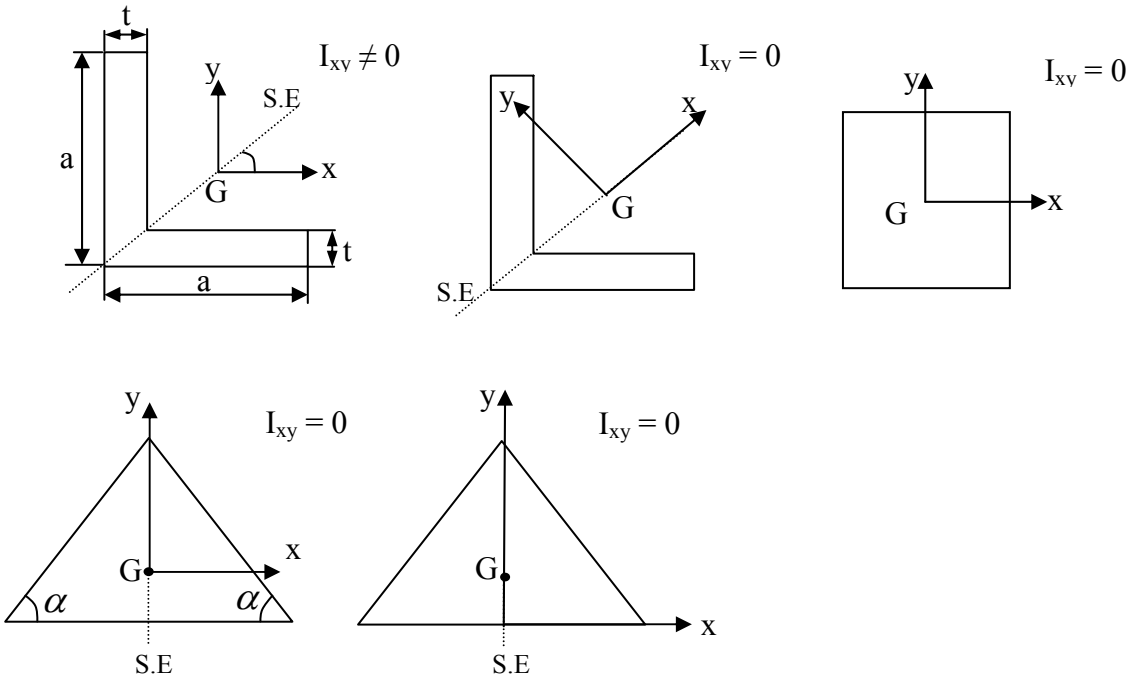
Benzer şekilde;

$I_y = \frac{h.b^3}{12}$

Cismin tabanından geçen eksene göre ve ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentleri farklıdır. Ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti minimum atalet momentidir.

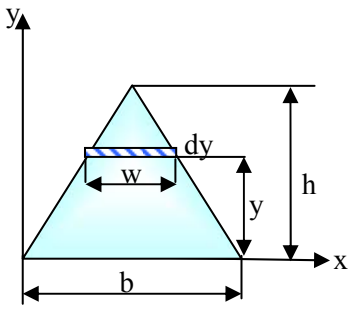
Ağırlık merkezinde; $I_{xy} = \int x.y.dA = 0$, $i_x = \sqrt{\frac{\frac{b.h^3}{12}}{b.h}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$, $i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$, $i_o = \sqrt{\frac{h^2}{12} + \frac{b^2}{12}}$

Eğer kesit bir simetri eksenine sahip ve xy eksen takımının eksenlerinden birisi bu simetri ekseniyle çakışacak şekilde seçilirse ve buna ek olarak xy eksen takımının orijini G ağırlık merkezinde ise kesitin çarpım atalet momenti $I_{xy} = 0$' dır. (SE: Simetri Ekseni)



Şekil: 6.2

Örnek 6.3: Üçgenin alan atalet momentinin hesabı



$$I_x = \int y^2 dA \qquad dA = w.dy$$

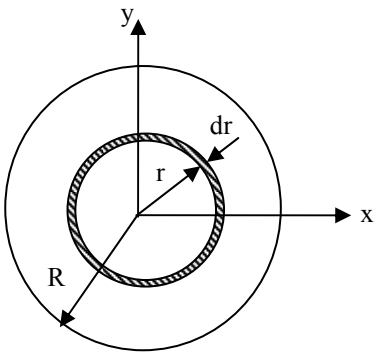
$$\frac{w}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad w = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \left(\frac{b}{h}h - \frac{b}{h}y \right) dy ,$$

$$I_x = \frac{b.h^3}{12}$$

$$I_{xG} = \int_{\frac{-h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 dA = \frac{bh^3}{36}$$

Örnek 6.4: Daire kesit için atalet momenti



$dA = 2\pi r.dr \qquad I_o = \int r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r dr$

$I_x = I_y \qquad I_o = 2\pi \left.\frac{r^4}{2^4}\right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$

$I_o = I_x + I_y$

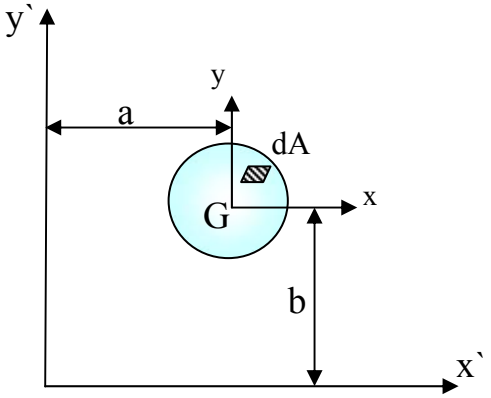
$I_x = \frac{I_o}{2}$

$I_x = \frac{\pi . R^4}{4} = I_y$

$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} \Longrightarrow D = 2R \qquad I_x = \frac{\pi . D^4}{64} = I_y$

$I_o = \frac{\pi R^4}{2} \Longrightarrow D = 2R \qquad I_o = \frac{\pi D^4}{32}$

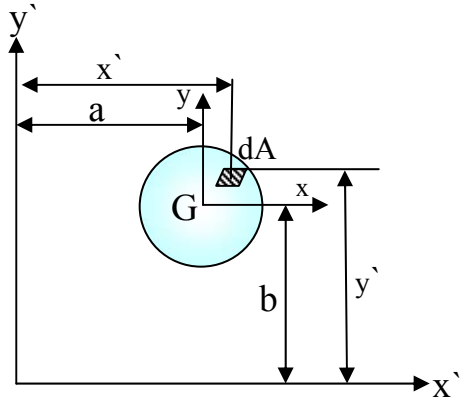
6.2 EKSENLERİN KAYDIRILMASI (PARALEL OLARAK)



$I_X = \int y^2 dA$
$I_y = \int x^2 dA$
$I_{xy} = \int xy dA$
} biliniyor

$I_{X`} = \int y`^2 dA$
$I_{y`} = \int x`^2 dA$
$I_{xy`} = \int x`y` dA$

$S_x = \int y.dA = 0$
$S_y = \int x.dA = 0$



(a , b) G (x`, y`) takımındaki koordinatları

$x` = a + x \qquad I_{x`} = \int y`^2 dA$

$y` = b + y \qquad I_{x`} = \int (y + b)^2 dA$

$I_{x`} = \int (y^2 + 2yb + b^2) dA$

$I_{x`} = \int y^2 dA + 2b \int y.dA + b^2 \int dA$

$I_{x`} = I_x + A.b^2 > 0$

$$I_{y`} = \int x`^2 dA$$

$$I_{y`} = \int (x+a)^2 dA$$

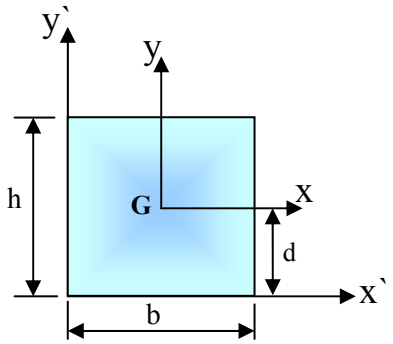
$$I_{y`} = I_y + a^2.A > 0$$

$$I_{x`y`} = \int x`y`dA$$

$$I_{x`y`} = \int (x+a)(y+b)dA = I_{xy} + a.b.A > 0$$

Bir cismin ağırlık merkezinden geçen eksenlere paralel herhangi bir eksene göre atalet momenti, cismin ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti ile bu paralel iki eksen arasındaki uzaklığın karesinin, cismin alanıyla çarpımının toplamına eşittir.

Örnek 6.5: Paralel eksenler teoreminin uygulaması

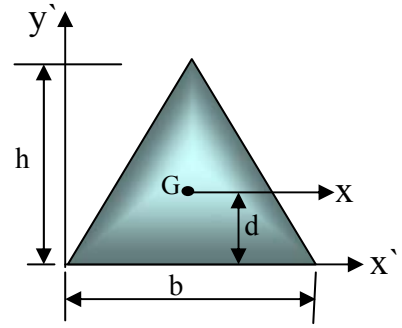


$$I_{x`} = I_{XG} + d^2 A$$

$$d = \frac{h}{2}$$

$$I_{x`} = \frac{b.h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 b.h = \frac{b.h^3}{3}$$

Örnek 6.6: Paralel eksenler teoreminin uygulaması

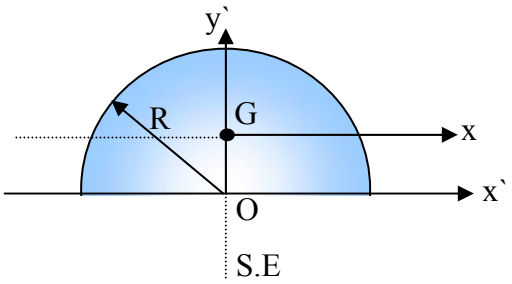


$$I_{x`} = I_{XG} + d^2 A$$

$$\frac{b.h^3}{12} = I_{XG} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{b.h}{2}$$

$$I_{XG} = \frac{b.h^3}{36}$$

Örnek 6.7: Yarım dairenin atalet momentinin hesabı



$$I_x = I_y = \frac{\pi.R^4}{4} \text{ (Tüm daire)}$$

$$I_{x`} = I_{y`} = \frac{\pi.R^4}{8} \text{ (Yarım daire)}$$

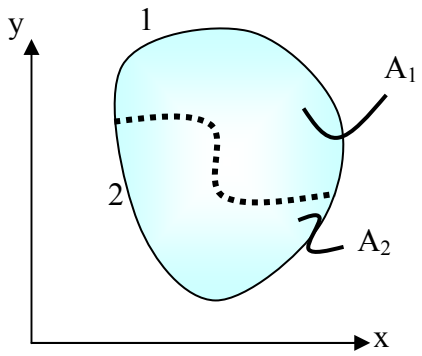
$$I_{x`} = I_{XG} + d^2A$$

$$\frac{\pi.R^4}{8} = I_{XG} = + \left(\frac{4.R}{3\pi}\right)^2 . \frac{\pi.R^2}{2}$$

$$I_{XG} = \frac{\pi.R^4}{8} - \frac{16.R^4}{18\pi}$$

$$I_{XG} = \frac{\pi.R^4}{8} . \left[1 - \frac{64}{9\pi^2}\right]$$

6.3 BİLEŞİK CİSİMLERİN ATALET MOMENTLERİ

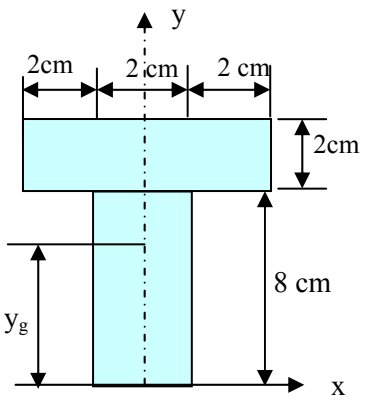


$$A = A_1 + A_2$$

$$I_x = I_{x1} + I_{x2}$$
$$I_y = I_{y1} + I_{y2}$$

$$I_{xy} = I_{xy1} + I_{xy2}$$

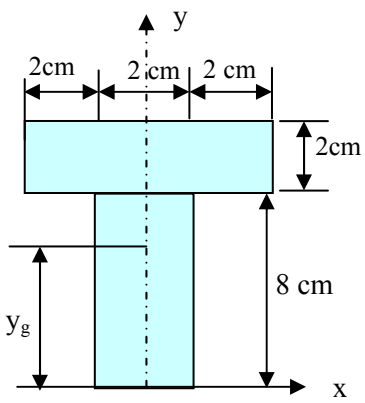
Örnek 6.9



a) Verilen profil kesitte I_x , I_y ve I_{xy} atalet momentlerini

b) Cismin ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentleri

a..)



$$I_x = I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_x = \frac{b_1.h_1^3}{12} + d_1^2.A_1 + \frac{b_2.h_2^3}{12} + d_2^2.A_2$$

$$I_x = \frac{6.2^3}{12} + 9^2.12 + \frac{2.8^3}{12} + 4^2.16 = 1317{,}33\,cm^4$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2}$$

$$I_y = \frac{b_1.h_1^3}{12} + d_1^2.A_1 + \frac{b_2.h_2^3}{12} + d_2^2.A_2$$

$$I_y = \frac{2.6^3}{12} + \frac{8.2^3}{12} = 41{,}33\,cm^4$$

$$I_{xy} = 9.0.12 + 4.0.16 = 0$$

b..)

$$x_g = 0$$

$$y_g = \frac{y_1.A_1 + y_2.A_2}{A_1 + A_2} = \frac{9.12 + 4.16}{12 + 16} = 6{,}14\,cm$$

$$I_{x'} = \frac{b_1.h_1^3}{12} + d_1^2.A_1 + \frac{b_2.h_2^3}{12} + d_2^2.A_2$$

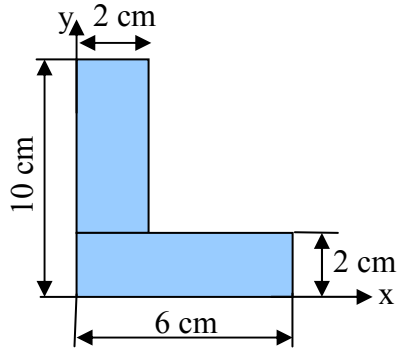
$$I_{x'} = \frac{6.2^3}{12} + (9 - 6{,}14)^2.12 + \frac{2.8^3}{12} + (4 - 6{,}14)^2.16 = 260{,}76\,cm^4$$

$$I_{y'} = \frac{b_1.h_1^3}{12} + d_1^2.A_1 + \frac{b_2.h_2^3}{12} + d_2^2.A_2$$

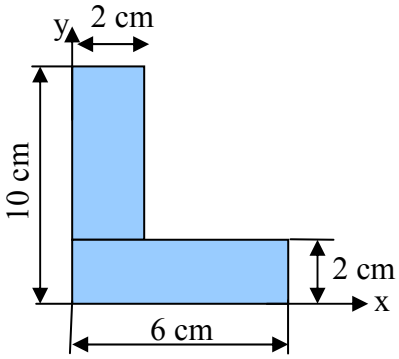
$$I_y = \frac{2.6^3}{12} + \frac{8.2^3}{12} = 41{,}33\,cm^4$$

$$I_{xy} = 0$$

Örnek 6.10: Verilen profil kesitin ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentlerini hesaplayınız.



Çözüm:



$$x_g = \frac{1.16 + 3.12}{16 + 12} \cong 1{,}85$$

$$y_g = \frac{6.16 + 1.12}{16 + 12} \cong 3{,}85$$

$$I_{x`} = \frac{2.8^3}{12} + (6 - 3{,}85)^2.16 + \frac{6.2^3}{12} + (1 - 3{,}85)^2.12 = 260{,}76 \text{ cm}^4$$

$$I_{y`} = \frac{8.2^3}{12} + (1 - 1{,}85)^2.16 + \frac{2.6^3}{12} + (3 - 1{,}85)^2.12 = 68.76 \text{ cm}^4$$

$I_{x`y`} = I_{x1y1} + I_{x2y2}$

$= x_1.y_1.A_1 + x_2.y_2.A_2$

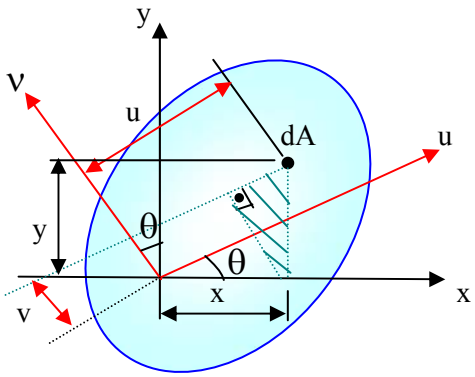
$= (1\text{-}1{,}85).(6\text{-}3{,}85).16 + (3\text{-}1{,}85).(1\text{-}3{,}85).12$

$= (-0.85).(2{,}15).16 + (1{,}15).(-2{,}85).12$

$= -68.57 \text{ cm}^4$

6.4 EKSENLERİN DÖNDÜRÜLMESİ (ASAL EKSENLER VE ASAL ATALET MOMENTLERİ)

Atalet momentlerinin seçilen eksenlere göre yer aldıkları ve bu eksenlerin değişmesiyle tabii olarak değiştiklerini daha önce görmüştük. Şimdi eksenlerin döndürülmesi halinde atalet momentlerinin nasıl değiştiğini inceleyelim.



$u = x.\cos\theta + y.\sin\theta$

$v = y.\cos\theta - x.\sin\theta$

$$I_u = \int v^2 dA = \int (y.\cos\theta - x.\sin\theta)^2 dA$$

$$I_u = \cos^2\theta \int y^2 dA - 2\sin\theta\cos\theta \int xy dA + \sin^2\theta \int x^2 dA$$

1.) $I_u = I_x.\cos^2\theta - 2.I_{xy}.\sin\theta.\cos\theta + I_y.\sin^2\theta$

$$I_u = \int v^2 dA = \int (x.\cos\theta - y.\sin\theta)^2 dA = \cos^2\theta \int x^2 dA + 2.\sin\theta.\cos\theta \int x.y.dA + \sin^2\theta \int y^2 dA$$

2.) $I_v = I_x.\cos^2\theta + 2.I_{xy}.\sin\theta.\cos\theta + I_y.\sin^2\theta$

3.) $$I_{uv} = \int u.v.dA = \int (x.\cos\theta + y.\sin\theta)(y.\cos\theta - x.\sin\theta)$$

$I_{uv} = I_x.\sin\theta.\cos\theta - I_y.\sin.\theta.\cos\theta + I_{xy}.(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$2\sin.\theta.\cos\theta = \sin.2\theta$

$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos.2\theta$ dönüşümleri yapılırsa

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}.\cos.2\theta - I_{xy}.\sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}.\cos.2\theta + I_{xy}.\sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}.\sin.2\theta - I_{xy}.\cos 2\theta$$

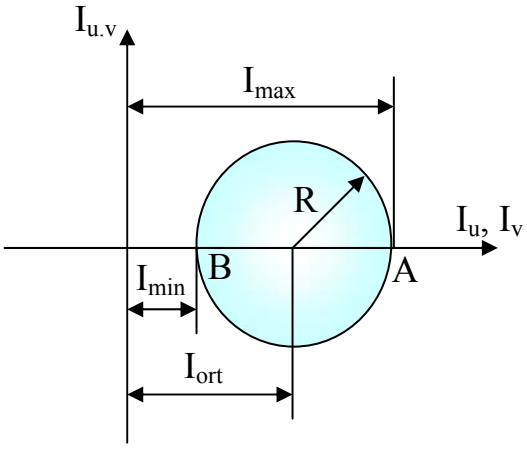
$I_{uv} = 0$ ise

$$\boxed{\tan 2\theta = -\frac{2.I_{xy}}{I_x - I_y}}$$

Eğer I_u , I_v , I_{uv} den θ' lı terimler yok edilirse

$$\left[I_u - \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)\right]^2 + I_{uv} = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \qquad \text{(Çember Denklemi)}$$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$



$I_{max} = I_{ort} + R$

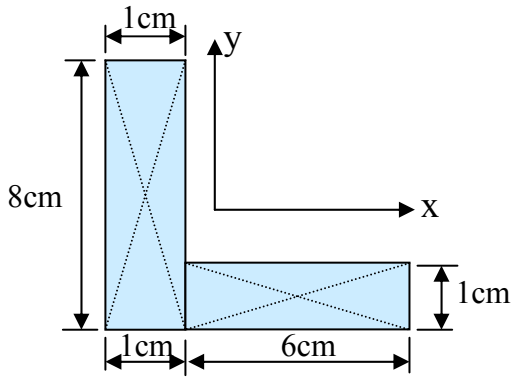
$I_{min} = I_{ort} - R$

Atalet momentinin maksimum ve minumum değerine asal atalet momentleri, Bunların bulunduğu eksenlere asal eksenler denir. Asal eksenler üzerinde $I_{xy} = 0$ ' dır.

$$\mathbf{I_{ort}} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad , \qquad \mathbf{R} = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\mathbf{I_{max\,,\,min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Örnek 6.11: Ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre $I_x, I_y, I_{xy}, I_{max}, I_{min}$ hesaplayınız.



Çözüm:

$$x_g = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0,5.8 + 4.6}{8 + 6} = 2\,cm$$

$$y_g = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{4.8 + 0,5.6}{8 + 6} = 2,5\,cm$$

$$I_x = \frac{1.8^3}{12} + (4 - 2,5)^2.8 + \frac{6.1^3}{12} + (0,5 - 2,5)^2.6 = 85,16\,cm^4$$

$$I_y = \frac{8.1^3}{12} + (0,5 - 2)^2.8 + \frac{1.6^3}{12} + (4 - 2,5)^2.6 = 50,16\ cm^4$$

$I_{xy} = x_1.y_1.A_1 + x_2.y_2.A_2 = (0,5\text{-}2).(4\text{-}2,5).8 + (4\text{-}2,5)(0,5\text{-}2,5).6 = -36\ cm^4$

$$\tan 2\theta = -\frac{2.I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2.(-36)}{85,16 - 50,16}$$

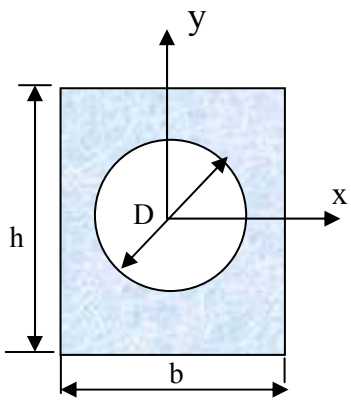
$$\theta = 32^o$$

$$\mathbf{I_{max\,,\,min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2} = \frac{85,16 + 50,16}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{85,16 - 50,16}{2}\right)^2 + (-36)^2}$$

$\mathbf{I_{max}} = 67,66 + 40,02 = 107,68\ cm^4$

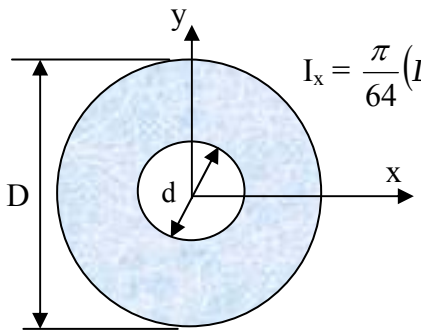
$\mathbf{I_{min}} = 67,66 - 40,02 = 27,64\ cm^4$

NOT: Bir kesitte delik varsa dolu kesitin atalet momentinden deliğin atalet momenti çıkarılır.



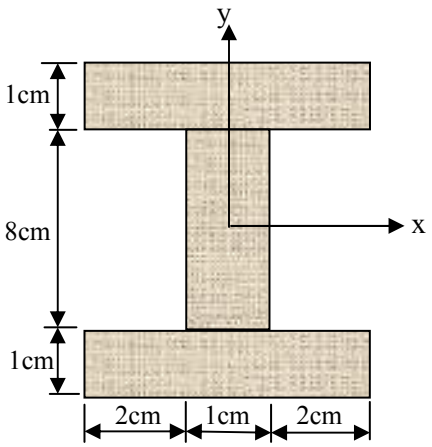
$$I_x = \frac{b.h^3}{12} - \frac{\pi.D^4}{64}$$

$$I_y = \frac{h.b^3}{12} - \frac{\pi D^4}{64}$$



$$I_x = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$$

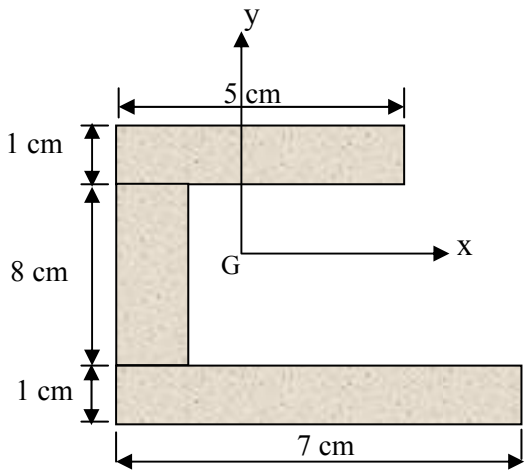
Örnek 6.12: Şekildeki cismin I_x, I_y, I_{xy} hesaplayınız.



$$I_x = \frac{1.8^3}{12} + \left(\frac{5.1^3}{12} + (4{,}5)^2.5\right).2 = 246\text{cm}^4$$

$$I_y = \frac{8.1^3}{12} + 2.\left(\frac{5^3.1}{12}\right) \quad veya \quad \frac{10.5^3}{12} - 2\left(\frac{8.2^3}{12} + (1{,}5)^2.16\right) = 21{,}5\ \text{cm}^4$$

Örnek 6.13: Verilen profil kesitte ağırlık merkezinden geçen x, y eksen takımına göre atalet momentlerini hesaplayınız.



$$x = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2,5.5 + 0,5.8 + 3,5.7}{20} = 2,0 \text{ cm}$$

$$y = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{9,5.5 + 5.8 + 0,5.7}{20} = 4,5 \text{ cm}$$

$$I_x = \frac{5.1^3}{12} + (9,5-4,5)^2.5 + \frac{1.8^3}{12} + (5-4,5)^2.8 + \frac{1^3.7}{12} + (05-4,5)^2.7 = 282,6\ cm^4$$

$$I_y = \frac{1.5^3}{12} + (2,5-2)^2.5 + \frac{8.1^3}{12} + (0,5-2)^2.8 + \frac{1.7^3}{12} + (3,5-2)^2.7 = 74,6\ cm^4$$

$I_{xy} = x_1y_1A_1 + x_2y_2A_2 + x_3y_3A_3 = 0,5.5.5 + (-1,5)(0,5).8 + (1,5)(-4).7 = -35,5 \text{ cm}^4$

$$\tan 2\theta = -\frac{2.(-35,5)}{282,6-74,6}$$

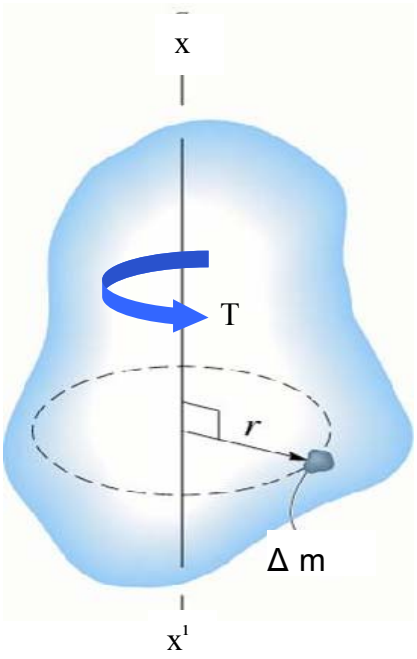
$$\theta = 9,42^o$$

$$I_{max\,,\,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2} = \frac{282,6+74,6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{282,6-74,6}{2}\right)^2 + (-35,5)^2}$$

$I_{max} = 178,6 + 109,89 = 288,49 \text{ cm}^4$

$I_{min} = 178,6 - 109,89 = 68,71 \text{ cm}^4$

6.5 KÜTLE ATALET MOMENTLERİ



Şekil 6.3

xx` eksen takımından r kadar uzaklıkta bir Δm kütlesi düşünelim buna bir kuvvet çifti uygulayalım (T). Sistem hareketsizken Δm kütlesi xx` ekseni etrafında dönmeye başlayacaktır. Burada sistemin verilen bir dönme hızına erişmesi için gerekli zamanın Δm kütlesiyle orantılı olduğunu göstermek istiyoruz. Bundan dolayı $r^2.\Delta m$ çarpımını sistemin ataletinin (eylemsizliğinin) yani sistemi harekete geçirmeye çalıştığımızda bunun direncinin bir ölçüsüdür. $r^2.\Delta m$ çarpımına Δm kütlesinin xx` eksenine göre **kütle atalet momenti** denir.

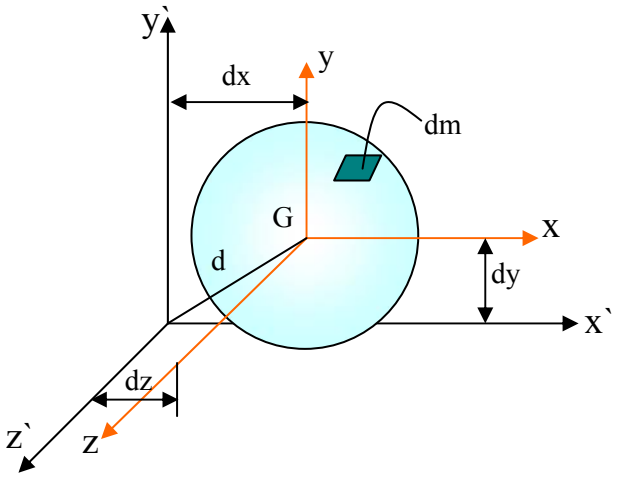
$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3 + ... + \Delta m_n)$$

$$I = \sum r_1^2 \Delta m_i = r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + ... + r_n^n \Delta m_n$$

$$I = \int r^2 dm = k^2 m \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad \text{(atalet yarıçapı)}$$

Burada **k** atalet yarıçapı, **I** sabit kalmak üzere cismin tüm kütlesinin konulması gereken uzaklığı ifade eder.

6.5.1 PARALEL EKSENLER TEOREMİ



$$d = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

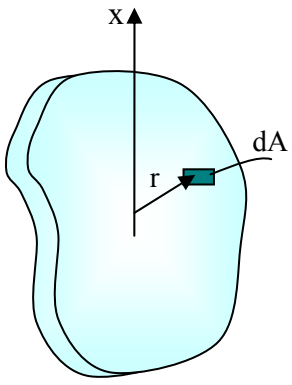
$$I = I_G + m.d^2$$

$$(I_x)_k = (I_G)_k + m.dy^2$$

Örnek 6.14: İnce Levhaların Kütle Atalet Momentleri

ρ: birim hacmin kütlesi (kg / m^3)

t : sabit



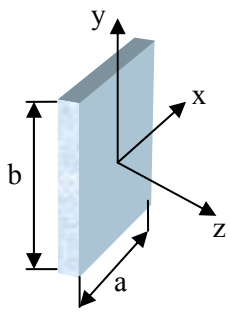
$(I_{xx})_{kütle} = \int r^2 dm$ dm=tρdA

$(I_{xx})_k = \int r^2 t\rho dA = t\rho \int r^2 dA$ *burada* $\int r^2 dA$ Polar At. M

$(I_{xx})_{kütle} = t\rho(I_{xx})_{alan}$ *birimi ise* (kg.m^2) dir

$(I_{yy})_{kütle} = t\rho(I_{yy})_{alan}$

$(I_o)_{kütle} = t\rho(I_o)_{alan}$



$(I_{xx})_{kütle} = t\rho(I_{xx})_{alan} = t\rho(\frac{ab^3}{12})$

$(I_{yy})_{kütle} = t\rho(I_{yy})_{alan} = t\rho(\frac{ba^3}{12})$

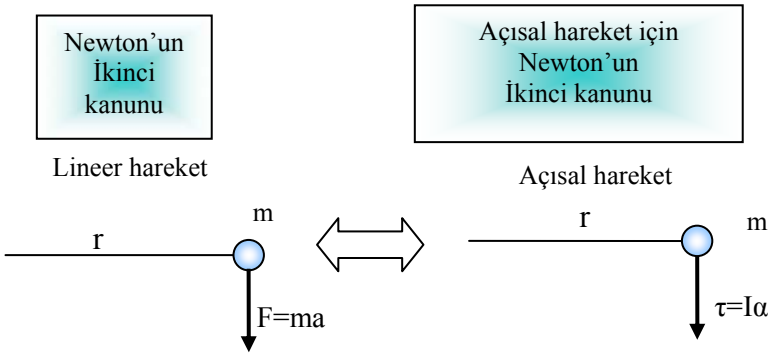
V=a.b.t ve m=ρV yukarıdaki ifadelerde yerine konulursa

$(I_x)_{kütle}=mb^2/12$ ve $(I_y)_{kütle}=ma^2/12$

$(I_o)_{kütle}=(m/12).(a^2+b^2)$ elde edilir.

6.5.2 LİNEER VE AÇISAL HAREKET

Sabit bir noktadan r kadar uzaklıktaki m kütlesi sabit bir eksen etrafında döndürülmek istensin. Bu lineer hareket Newtonun ikinci kanunundaki kuvvet ve ivme tanımlanabilir. Sadece dönme olarak ele alınsa da bu dönen sistemede ikinci kanun uygulanabilir. Ve buradan kütle atalet momenti tanımlanabilir.



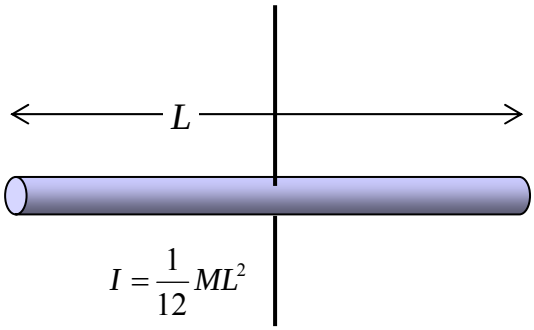
$\tau=F.r \qquad \alpha=\frac{a_t}{r}$

$\tau=m.a.r$

$m.a.r=I\frac{a}{r}$

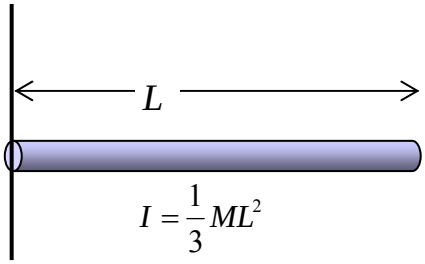
$I=mr^2$

6.5.3 BAZI CİSİMLERİN KÜTLE ATALET MOMENTLERİ



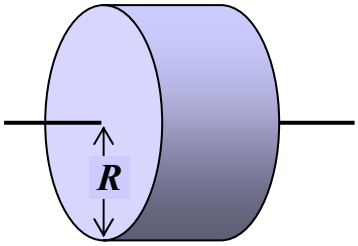
$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

İnce Çubuk



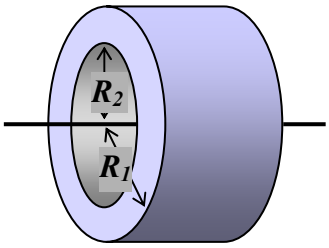
$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

İnce Çubuk



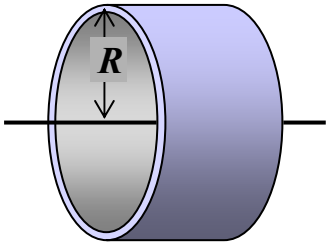
$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

Disk



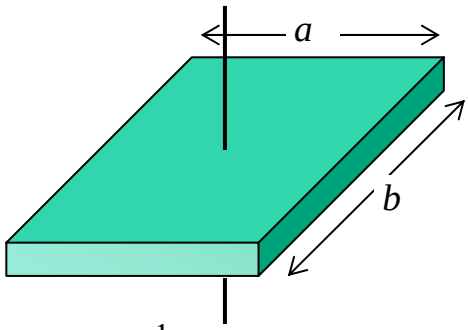
$$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$

İçi boş silindir



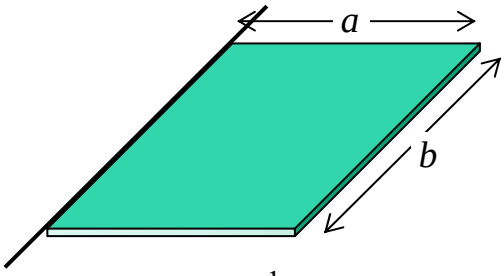
$$I = MR^2$$

İnce Cidarlı silindir



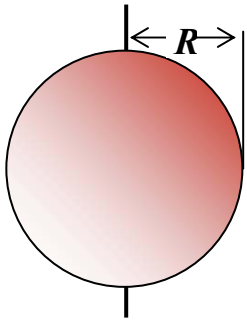
$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

Dikdörtgen levha



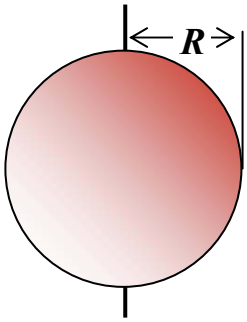
$$I = \frac{1}{3} Ma^2$$

Dikdörtgen levha



$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Küre

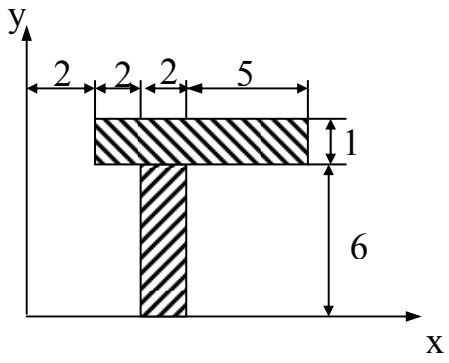


$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

İnce cidarlı içi boş Küre

6.6 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER
ALAN ATALET MOMENTİ İLE İLGİLİ ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1)



a) Ağırlık merkezini bulunuz.
b) Ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momentlerini hesaplayınız.
Not: Ölçüler cm'dir.

$$x = \frac{9x6{,}5 + 12x5}{9+12} = \frac{118{,}5}{21} = 5{,}64cm$$

$$y = \frac{9x6{,}5 + 12x3}{21} = 4{,}5cm$$

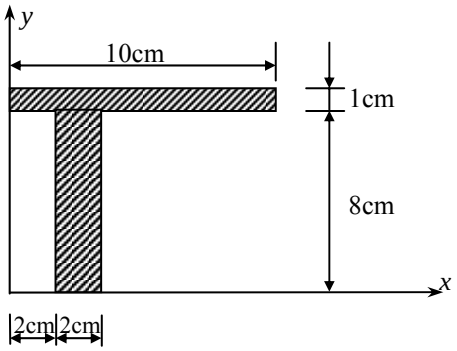
$$I_x = \frac{9x1^3}{12} + (9)(6{,}5-4{,}5)^2 + \frac{6^3 x2}{12} + (12)(3-4{,}5)^2$$

$$I_x = 0{,}75 + 36 + 36 + 27 = 99{,}75cm^4$$

$$I_y = \frac{1x9^3}{12} + (9)(6{,}5-5{,}64)^2 + \frac{2^3 x6}{12} + (12)(5-5{,}64)^2$$

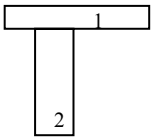
$$I_y = 60{,}75 + 6{,}65 + 4 + 4{,}91 = 76{,}31cm^4$$

Problem 2)



Verilen kesitin;

a) Ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.
b) Ağırlık merkezinden geçen koordinat eksenine göre atalet momentlerini hesaplayınız.
c) Asal atalet momentlerini hesaplayınız.



	x	y	A	Ax	Ay
1	5	8,5	10	50	85
2	3	4	16	48	64
Toplam			26	98	149

a)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A} = \frac{98}{26} = 3{,}77\ cm \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma yA}{\Sigma A} = \frac{149}{26} = 5{,}73\ cm$$

b)

$$I_x = \frac{10.1^3}{12} + (8{,}5 - 5{,}73)^2.10 + \frac{2.8^3}{12} + (4 - 5{,}73)^2.16 = 210{,}78\ cm^4$$

$$I_y = \frac{1.10^3}{12} + (5 - 3{,}77)^2.10 + \frac{8.2^3}{12} + (3 - 3{,}77)^2.16 = 113{,}28\ cm^4$$

$$I_{xy} = 10.(8{,}5 - 5{,}73)(5 - 3{,}77) + 16.(4 - 5{,}73)(3 - 3{,}77) = 55{,}38\ cm^4$$

c)

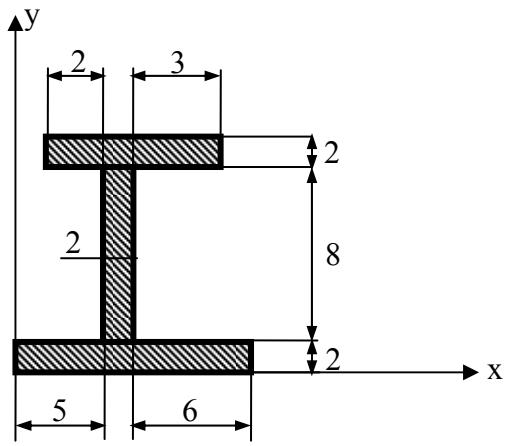
$$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} = \frac{210{,}78 + 113{,}28}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{210{,}78 - 113{,}28}{2}\right)^2 + (55{,}38)^2}$$

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = 162{,}03 \pm 73{,}78$$

$$\underline{I_{\max} = 235{,}81 cm^4}$$

$$\underline{I_{\min} = 88{,}25 cm^4}$$

Problem 3)



Verilen profil kesitte;

a) Ağırlık merkezini,
b) Ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momentini,
c) Asal atalet momentini hesaplayınız. (verilen ölçüler cm'dir)

	A	*x*	*y*	*Ax*	*Ay*
1	*14*	*6,5*	*11*	*91*	*154*
2	*16*	*6*	*6*	*96*	*96*
3	*26*	*6,5*	*1*	*169*	*26*
	56			*356*	*276*

$$\bar{x} = \frac{356}{56} = 6{,}35\,cm$$

$$\bar{y} = \frac{276}{56} = 4{,}92\,cm$$

b)

$$I_x = \frac{7.2^3}{12} + (11-4{,}92)^2.14 + \frac{2.8^3}{12} + (6-4{,}92)^2.16 + \frac{13.2^3}{12} + (1-4{,}92)^2.26 = 1034{,}1\ cm^4$$

$$I_y = \frac{2.7^3}{12} + (6{,}5-6{,}35)^2.14 + \frac{8.2^3}{12} + (6-6{,}35)^2.16 + \frac{2.13^3}{12} + (6{,}5-6{,}35)^2.26 = 431{,}1\ cm^4$$

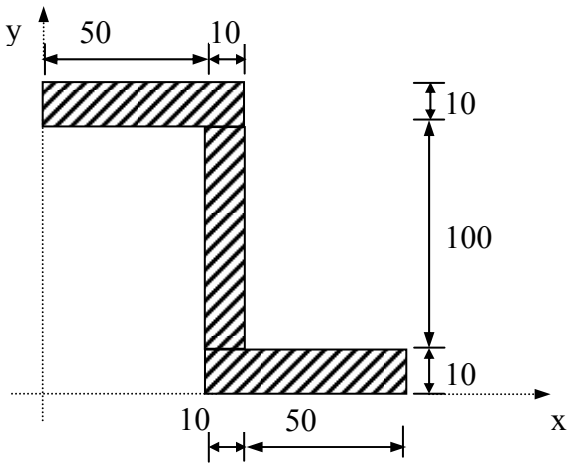
$$I_{xy} = 14(0{,}15)(6{,}08) + 16(-0{,}35)(1{,}08) + 26(0{,}15)(-3{,}92) = -8{,}628\ cm^4$$

c)

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + \left(I_{xy}\right)^2} = \frac{1034{,}1 + 431{,}1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1034{,}1 - 431{,}1}{2}\right)^2 + \left(-8{,}628\right)^2}$$

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = 732{,}6 \pm 495{,}57 \quad \Rightarrow \quad \underline{I_{\max} = 1228{,}17\,cm^4} \quad ; \quad \underline{I_{\min} = 237{,}03\,cm^4}$$

Problem 4)



Şekilde verilen profil kesitin ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre atalet momentlerini ve asal atalet momentlerini hesaplayınız. (Ölçüler mm'dir)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A} = \frac{30.600 + 55.1000 + 80.600}{600 + 1000 + 600} = 55\ mm$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma yA}{\Sigma A} = \frac{115.600 + 600.1000 + 5.600}{600 + 1000 + 600} = 60\ mm$$

a) Şekilde verilen parça 3 kısma ayrılarak çözülür. Burada;

I_{xT} hesaplanması; $I_{xT} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$

$$I_{x1} = I_{x3} = \frac{b.h^3}{12} + d^2.A = \frac{60.10^3}{12} + (115-60)^2.600 = 1820000mm^4$$

$$I_{x2} = \frac{b.h^3}{12} + d^2.A = \frac{10.100^3}{12} + 0^2.1000 = 833333{,}33mm^4$$

$$I_{xT} = 4473333{,}33mm^4$$

I_{yT} hesaplanması; $I_{yT} = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}$

$$I_{y1} = I_{y3} = \frac{b.h^3}{12} + d^2.A = \frac{10.60^3}{12} + 25^2.600 = 555000mm^4$$

$$I_{y2} = \frac{b.h^3}{12} + d^2.A = \frac{100.10^3}{12} + 0^2.1000 = 8333{,}33mm^4$$

$$I_{yT} = 1118333{,}33mm^4$$

I_{xy} hesaplanması; $I_{xy} = x_1 y_1 A_1 + x_2 y_2 A_2 + x_3 y_3 A_3$

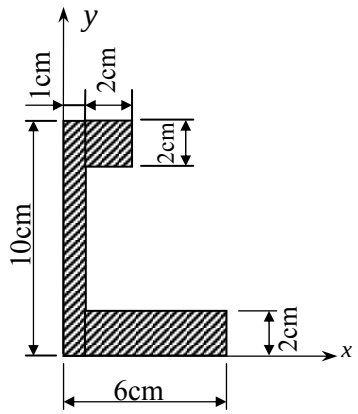
$$I_{xy} = (115-60).(30-55).600 + (60-60).(55-55).1000 + (5-60).(80-55).600$$

$$I_{xy} = -1650000mm^4$$

b) $I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + {I_{xy}}^2}$ buradan;

$I_{\min} = 442855{,}164mm^4$,, $I_{\max} = 5148811{,}496mm^4$ olmaktadır.

Problem 5)



Ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre;

a) Atalet momentlerini
b) Asal atalet momentlerini hesaplayınız.

	x	*y*	*A*	*xA*	*yA*
1	*2*	*9*	*4*	*8*	*36*
2	*0,5*	*5*	*10*	*5*	*50*
3	*3,5*	*1*	*10*	*35*	*10*
	Toplam		*24*	*48*	*96*
			ΣA	*ΣxA*	*ΣyA*

$$\bar{x} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A} = \frac{48}{24} = 2\,\text{cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma yA}{\Sigma A} = \frac{96}{24} = 4\,\text{cm}$$

a)

$$I_x = \frac{2\times 2^3}{12} + 4(9-4)^2 + \frac{1\times 10^3}{12} + 10(5-4)^2 + \frac{5\times 2^3}{12} + 10(1-4)^2 \Rightarrow \underline{I_x = 288cm^4}$$

$$I_y = \frac{2\times 2^3}{12} + 4(2-2)^2 + \frac{10\times 1^3}{12} + 10(0{,}5-2)^2 + \frac{2\times 5^3}{12} + 10(3{,}5-2)^2 \Rightarrow \underline{I_y = 68cm^4}$$

$$I_{xy} = x_1A_1y_1 + x_2A_2y_2 + x_3A_3y_3$$

$$I_{xy} = (2-2).(9-4).4 + (0{,}5-2).(5-4).10 - (3{,}5-2).(1-4).10 \Rightarrow \underline{I_{xy} = -60cm^4}$$

b)

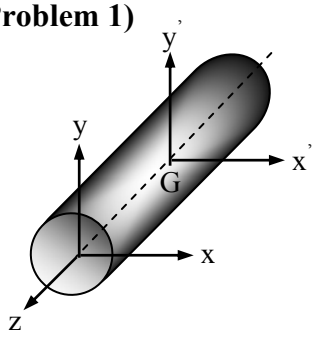
$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + \left(I_{xy}\right)^2} = 178 \pm 125{,}3$$

$$\underline{I_{\max} = 303{,}3cm^4}$$

$$\underline{I_{\min} = 52{,}7cm^4}$$

KÜTLE ATALET MOMENTİ İLE İLGİLİ ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1)



L=50 mm ve m=493,223 gr olan ince bir çubuğun;

a) y' ekseni etrafında dönmesi durumunda meydana gelen kütle atalet momentini
b) y ekseni etrafında dönmesi durumunda meydana gelen kütle atalet momentini hesaplayınız.

Çözüm:

a)

$$I_{y'} = \frac{1}{12} m.L^2$$

$$I_{y'} = \frac{1}{12} 493.223.(5)^2$$

$$I_{y'} = 1027{,}548\ gr.cm^2$$

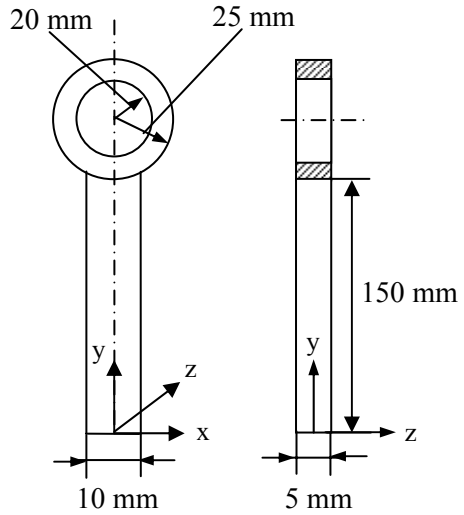
b)

$$I_y = \frac{1}{3} m.L^2$$

$$I_y = \frac{1}{3} 493.223.(5)^2$$

$$I_y = 4110{,}19\ gr.cm^2$$

Problem 2)



Şekilde gösterilen cismin x ve z eksenleri etrafında döndürülmesi durumunda kütle atalet momentlerini bulunuz. (ρ=7,85 gr/cm^3)

Çözüm:

$$I_{x1} = \frac{1}{3} m_1 a^2$$

$$V_1 = 0{,}5.1.15 = 7{,}5\, cm^3$$

$$m_1 = \rho.V_1 \;\Rightarrow\; m_1 = 7{,}85.7{,}5 \;\Rightarrow\; m_1 = 58{,}875\ gr$$

$$I_{x1} = \frac{1}{3} m_1 a^2 = \frac{1}{3}.58{,}875.(15)^2 \Rightarrow I_{x1} = 4415{,}625\ gr.cm^2$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi.R^4}{4} (Tam\ dairenin\ atalet\ momenti)$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi.R^4}{8} (Yarıa\ \ dairenin\ atalet\ momenti)$$

$$I_{x2} = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4).\rho.t + m_2.d^2$$

$$V_2 = \pi.(R^2 - r^2).t = \pi.(2{,}5^2 - 2^2).0{,}5 = 3{,}53\ cm^3 \quad (m_2 = \rho.t.\pi.(R^2 - r^2))$$

$$m_2 = \rho.V_2 \;\Rightarrow\; m_2 = 7{,}85.3{,}53 \;\Rightarrow\; m_2 = 27{,}71\ gr$$

$$I_{x2} = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4).\rho.t + m_2.d^2$$

$$I_{x2} = \frac{\pi}{4}(R^2 + r^2).(R^2 - r^2).\rho.t + m_2.d^2$$

$$I_{x2} = \frac{m_2}{4}(R^2 + r^2) + m_2.d^2 = \frac{27{,}71}{4}.(2{,}5^2 + 2^2) + 27{,}71.(17{,}5)^2$$

$$I_{x2} = 8557{,}19\ gr.cm^2$$

$$I_{xT} = I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_{xT} = 4415{,}625 + 8557{,}19$$

$$I_{xT} = 12928{,}815\ gr.cm^2$$

$$I_{z1} = \frac{1}{3} m_1 a^2$$

$$I_{z1} = \frac{1}{3}.58{,}875.(15)^2$$

$$I_{z1} = 4415{,}625\ gr.cm^2$$

$$I_{z2} = \frac{1}{2}.m_2.(R^2 + r^2) + m_2.d^2$$

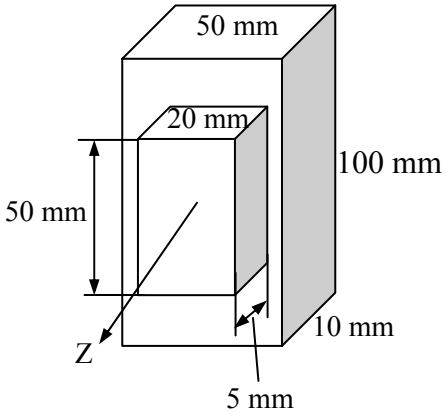
$$I_{z2} = \frac{1}{2}.27{,}71.(2{,}5^2 + 2^2) + 27{,}71.(17{,}5)^2 = 8628{,}2\ gr.cm^2$$

$$I_{zT} = I_{z1} + I_{z2}$$

$$I_{zT} = 4415{,}625 + 8628{,}2$$

$$I_{zT} = 13043{,}82\ gr.cm^2$$

Problem 3)



Şekilde verilen cismin z eksenine göre kütle atalet momentini bulunuz.

(ρ=7,85 gr/cm^3)

Çözüm:

$V_1 = 2.0,5.5 = 5 cm^3$

$m_1 = \rho.V_1 \Rightarrow m_1 = 7,85.5$

$m_1 = 39,25\ gr$

$I_{z1} = \frac{1}{12} m_1 (a^2 + b^2)$

$I_{z1} = \frac{1}{12}.39,25.(5^2 + 2^2)$

$I_{z1} = 94,85\ gr.cm^2$

$V_2 = 10.1.5 = 50\ cm^3$

$m_2 = \rho.V_2 \Rightarrow m_2 = 7,85.50$

$m_2 = 392,5\ gr$

$I_{z2} = \frac{1}{12} m_2 (a^2 + b^2)$

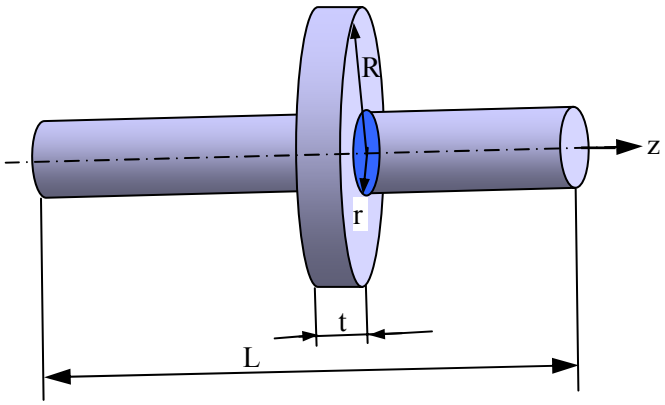
$I_{z2} = \frac{1}{12}.392,5.(5^2 + 10^2)$

$I_{z2} = 4088,54\ gr.cm^2$

$I_{zT} = 94,85 + 4088,54$

$I_{zT} = 4183,39\ gr.cm^2$

Problem 4)



R=100 mm, r=25 mm, L=300 mm, t=5 mm ve ρ=7.85 gr/cm^3 olan şekildeki parça için z ekseni etrafında dönmesi durumunda meydana gelen kütle atalet momentini hesaplayınız.

Çözüm:

$V_1 = \pi.r^2.L$

$V_1 = \pi.(2,5)^2.30$

$V_1 = 589,04\ cm^3$

$m_1 = \rho.V_1 \ \Rightarrow\ m_1 = 7,85.589,04$

$m_1 = 4624,03\ gr$

$I_{z1} = \frac{1}{2} m_1.r^2$

$I_{z1} = \frac{1}{2}.4624,03.(2,5)^2$

$I_{z1} = 14450\ gr.cm^2$

$V_2 = \pi.(R^2 - r^2).L$

$V_2 = \pi.(10^2 - 2,5^2).0,5$

$V_2 = 147,26\ cm^3$

$m_2 = \rho.V_2 \ \Rightarrow\ m_2 = 7,85.147,26$

$m_2 = 1156\ gr$

$I_{z2} = \frac{1}{2} m_2.(R^2 + r^2)$

$I_{z2} = \frac{1}{2}.1156.(10^2 + 2,5^2)$

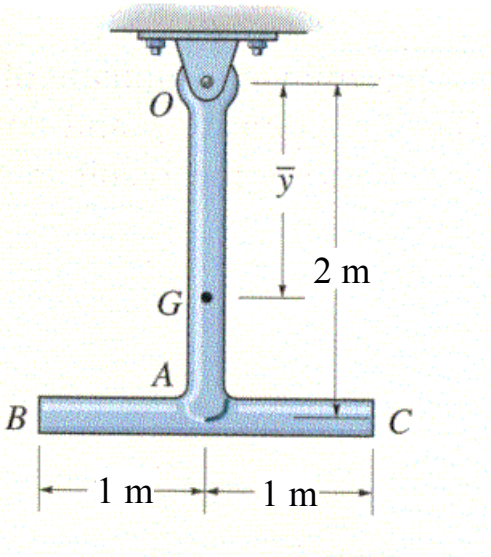
$I_{z2} = 61412,5\ gr.cm^2$

$I_{zT} = 14450 + 61412,5$

$I_{zT} = 75862,5\ gr.cm^2$

EK KÜTLE ATALET MOMENTİ PROBLEMLERİ

Problem 1)



Şekilde sarkaç O noktasından asılı ve her biri 10 N ağırlığındaki iki ince çubuktan oluşturulmuştur. Sarkacın O'daki pime göre kütle atalet momentini bulunuz.

Çözüm:

$$I_{O1} = \frac{1}{3} m.L^2 = \frac{1}{3}.\left(\frac{10}{9{,}81}\right).2^2 = 1{,}36 \ \ kg.m^2$$

veya

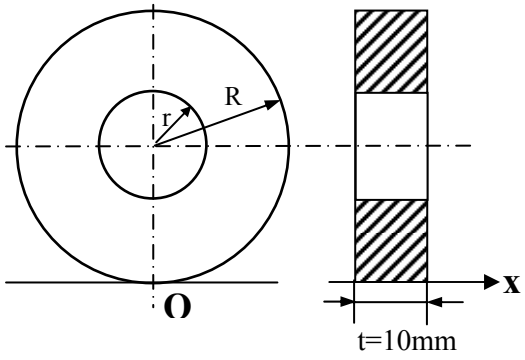
$$I_{O1} = \frac{1}{12} m.L^2 + m.d^2 = \frac{1}{12}.\left(\frac{10}{9{,}81}\right).2^2 + \left(\frac{10}{9{,}81}\right).1^2 = 1{,}36 \ \ kg.m^2$$

$$I_{O2} = \frac{1}{12} m.L^2 + m.d^2 = \frac{1}{12}.\left(\frac{10}{9{,}81}\right).2^2 + \left(\frac{10}{9{,}81}\right).2^2 = 4{,}41 \ \ kg.m^2$$

$$I_O = I_{O1} + I_{O2}$$

$$I_O = 1{,}36 + 4{,}41 = 5{,}77 \ \ kg.m^2$$

Problem 2)



R=250 mm, r=125 mm olan şekildeki plağın, yoğunluğu 8000 kg/m^3 ve kalınlığı 10 mm'dir. Buna göre, plağın x eksenine ve tabanındaki O noktasından geçen eksene göre kütle atalet momentlerini bulunuz.

<u>Çözüm:</u>

x eksenine göre;

m=ρ.V=ρ.π.(R^2- r^2).t=8000. π.(0,25^2–0,125^2).0,01=11,78 kg

$$I_x = \frac{1}{2} m.(R^2 + r^2) + m.d^2 = \frac{1}{2}.11{,}78.(0{,}25^2 + 0{,}125^2) + 11{,}78.0{,}25^2$$

$$I_x = 1{,}2\ kg.m^2$$

O eksenine göre;

m=ρ.V=ρ.π.(R^2- r^2).t=8000. π.(0,25^2–0,125^2).0,01=11,78 kg

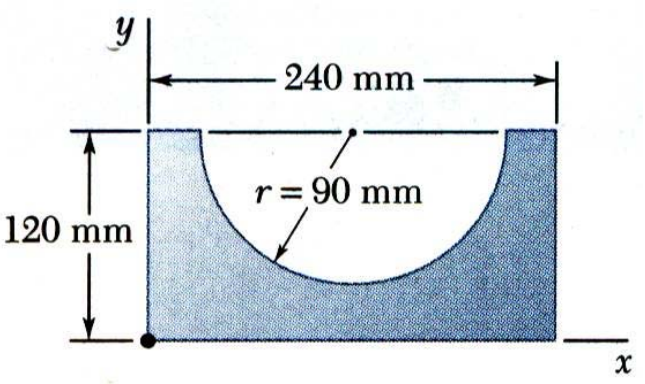
$$I_O = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4).\rho.t + m.d^2$$

$$I_O = \frac{\pi}{4}(R^2 + r^2).(R^2 - r^2).\rho.t + m.d^2$$

$$I_O = \frac{m}{4}(R^2 + r^2) + m.R^2 = \frac{11{,}78}{4}.(0{,}25^2 + 0{,}125^2) + 11{,}78.(0{,}25)^2$$

$$I_O = 0{,}96\ kg.m^2$$

Problem 3)



Kalınlığı 50 mm ve yoğunluğu ρ=2,71 gr/cm^3 olan şekildeki parçanın x ve y eksenlerine göre kütle atalet momentlerini bulunuz.

Çözüm:

x eksenine göre;

Prizma için; m=ρ.V=ρ.a.b.t=2,71.12.24.5=3902,4 gr

$$I_{x1} = \frac{1}{3} m.a^2 = \frac{1}{3}.3902{,}4.12^2$$

$$I_{x1} = 187315{,}2\ gr.cm^2$$

Yarım daire için;

$$m = \rho.V = \rho.\frac{\pi.r^2}{2}.t = 2{,}71.\frac{\pi.9^2}{2}.5 = 1724{,}02\ gr.cm^2$$

$$I_{x2} = \frac{\pi.r^4}{8}.\rho.t + m.d^2 \quad veya \quad I_{x2} = \frac{m.r^2}{4} + m.d^2 = \frac{1724{,}02.9^2}{4} + 1724{,}02.12^2$$

$$I_{x2} = 96976{,}12\ gr.cm^2$$

$$I_x = I_{x1} - I_{x2} = 187315{,}2 - 96976{,}12 = 90339{,}08\ gr.cm^2$$

y eksenine göre;

Prizma için; m=ρ.V=ρ.a.b.t=2,71.12.24.5=3902,4 gr

$$I_{x1} = \frac{1}{3} m.a^2 = \frac{1}{3}.3902{,}4.24^2 = 749260{,}8\ gr.cm^2$$

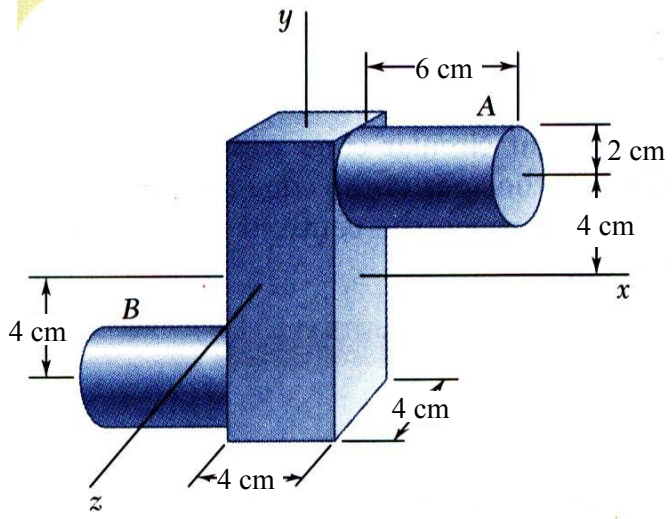
Yarım daire için;

$$I_{y2} = \frac{\pi.r^4}{4}.\rho.t + m.d^2 \quad veya \quad I_{y2} = \frac{m.r^2}{4} + m.d^2 = \frac{1724{,}02.9^2}{4} + 1724{,}02.12^2$$

$$I_{y2} = 283167\ gr.cm^2$$

$$I_y = I_{y1} - I_{y2} = 749260{,}8 - 283167 = 466093{,}8\ gr.cm^2$$

Problem 4)



Şeklideki cismin x eksenine göre kütle atalet momentini bulunuz ρ=7,85 gr/cm^3.

Çözüm:

Her bir silindir için;

m=ρ.V=ρ.π. r^2.L=7,85. π.2^2.6=591,87 gr

$$I_{x1} = \frac{1}{2} m.r^2 + m.d^2 = \frac{1}{2}.591{,}87.2^2 + 591{,}87.4^2$$

$$I_{x1} = 10653{,}66\ gr.cm^2$$

Prizma için; m=ρ.V=ρ.a.b.t=7,85.4.4.12=1507,2 gr

$$I_{x2} = \frac{1}{12} m.(a^2 + b^2) = \frac{1}{12}.1507{,}2.(4^2 + 12^2) = 20096\ gr.cm^2$$

$$I_x = 2.I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_x = 2.10653{,}66 + 20096 = 41403{,}32\ gr.cm^2$$

BÖLÜM 7

KİRİŞLERDE KESME KUVVETİ VE EĞİLME MOMENTLERİNİN HESAPLANMASI VE DİYAGRAMLARI

7.1 GİRİŞ VE TANIMLAR

Cisimlerin mukavemetlerinin asıl problemi, herhangi bir yapıya veya makine elemanına uygulanan dış kuvvetlerin yapıda veya elemanda doğuracağı gerilmelerin ve şekil değiştirmelerinin bulunmasıdır. Eksenel ve burulma yüklerine maruz elemanlarda yük elemanın her kesitinde sabit veya elemana belli oranlarda yayılmış bulunacağından bu tip elemanlarda gerilme ve şekil değiştirmelerin bulunması pek zorluk çekilmez.

Eğilme yüklerinde ise yükün tesiri kirişin genellikle her kesitinde değiştiğinden bunların çözümü daha karmaşık olmaktadır. Eğilme yükünün tesiri düşey "Kesme kuvveti" ve "Eğilme momenti" şeklini alır. Eğilme momenti kiriş kesitlerinde normal gerilmeler, kesme kuvveti ise kesitlerde kayma gerilmeleri meydana getirirler. Bunların maksimum oldukları kesitlerde maksimum normal gerilme ve maksimum kayma gerilmeleri hâsıl olmaktadır. Dolayısıyla kirişlerde kesme kuvveti eğilme momenti değerlerinin bilinmesi, bunlarla ilgili gerekli diyagramların bilinmesi çizilmesi önemli olmaktadır.

Kesiti boyu yanında çok küçük olan ve eksenine dik doğrultudaki kuvvetleri taşıyan taşıyıcı sistemlere **kiriş** denir. Kirişler değişik şekillerde sınıflandırılırlar. Mesnetleme şekillerine göre izostatik kirişler (Şekil 7.1) de olduğu gibi,

a) Basit kiriş
b) Çıkmalı kiriş
c) Konsol (Ankastre) Kiriş

olarak sınflandırılabilirler. Bunun yanında Çok mesnetli (sürekli kirişler), Gerber kirişleri vb. sayılabilir. Ayrıca kirişler biçimlerine göre (Şekil 7.2),

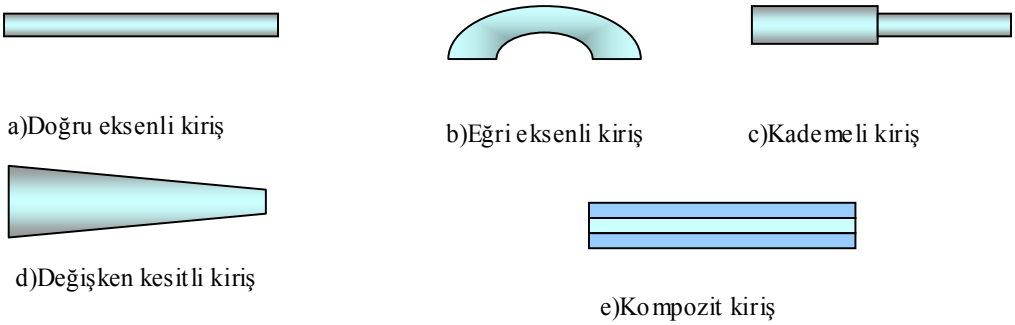
a) Doğru eksenli kirişler
b) Eğri eksenli kirişler
c) Değişken kesitli kirişler
d) Kademeli kesitli kirişler
e) Kompozit kirişler

olarak sayılabilir.



a) Çıkmalı Kiriş b) Basit Kiriş c) Konsol Kiriş

Şekil 7.1 Mesnetlerine göre kiriş çeşitleri



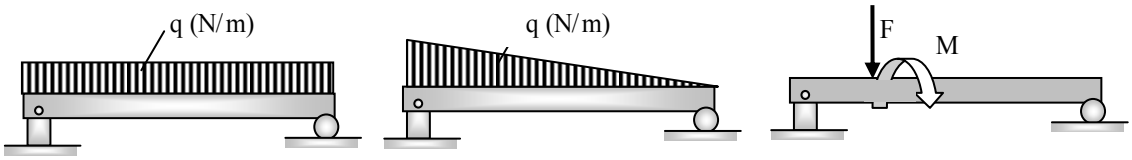
Şekil 7.2 Biçimlerine göre kiriş çeşitleri

Kirişleri, kesitlerine dik doğrultuda yükler taşıyan elemanlar diye tanımlamıştık. Taşıdıkları yükler de aşağıdaki gibi sınıflandırılabilirler (Şekil 7.3).

a) Yayılı yükler
   1. Düzgün yayılı yükler
   2. Lineer yayılı yükler q=q(x)

b) Tekil (nokta) yükler

c) Kuvvet çiftleri (kiriş ekseni dışından etki eden yüklerin eksene indirgenmesinden meydana gelen kuvvet çiftleri.)

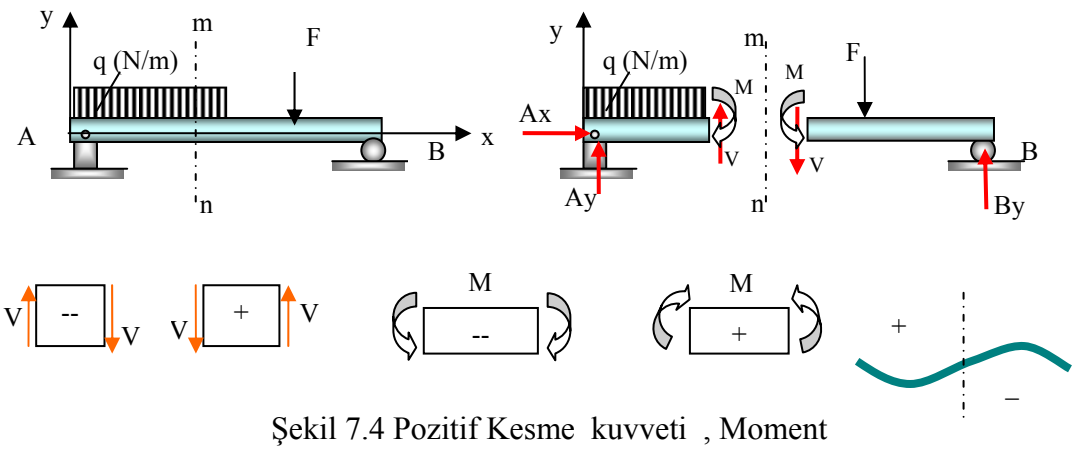


a)Düzgün yayılı yük b)lineer yayılı yük c)Tekil kuvvet ve kuvvet çifti

Şekil 7.3 Kirişlerde yük çeşitleri

7.2 KESME KUVVETİ VE EĞİLME MOMENTİ

Kirişleri değişik şekillerde sınıflandırmıştık. Bu bölümde doğru eksenli düşey yüklü kirişleri ele alacağız. Kiriş muhtelif dış yükler etkisi altında iken, kiriş boyunca etkisi değişen iç kuvvet yada kesit tesirleri olarak adlandırdığımız kesme kuvveti, normal kuvvet ve eğilme momentleri meydana gelir. Şekil 7.4 deki kirişi göz önüne alalım dış yüklerden dolayı mesnetlerde *Ax, Ay, By* reaksiyon kuvvetleri meydana gelir. Bu durumda kiriş dengededir. Kirişi **m-n** kesitinden ayırma metoduna göre ayıralım. Ayırma işleminden sonrada kirişin her iki kesitide dengede olmak zorundadır. Ayrılan kısımda kirişi dengeleyen kuvvetler sistemi Kesme kuvveti, Normal kuvvet ve Eğilme momentleri meydana gelir. Burada yalnızca kesme kuvvetleri ve eğilme momentleri etkisindeki doğru eksenli kirişler ele alınmıştır. İç kuvvetleri pozitif olacak şekilde yerleştirilim.



Şekil 7.4 Pozitif Kesme kuvveti , Moment

Ele alınan elemanları bir yerinden sabitlediğimizde kesme kuvveti, bunları saat ibresi dönme yönünün ters yönünde çeviriyorsa pozitif, değilse negatifdir. Momentler, ele alınan elamanı iç bükey yapıyorsa pozitif, değilse negatif işaretlidir.

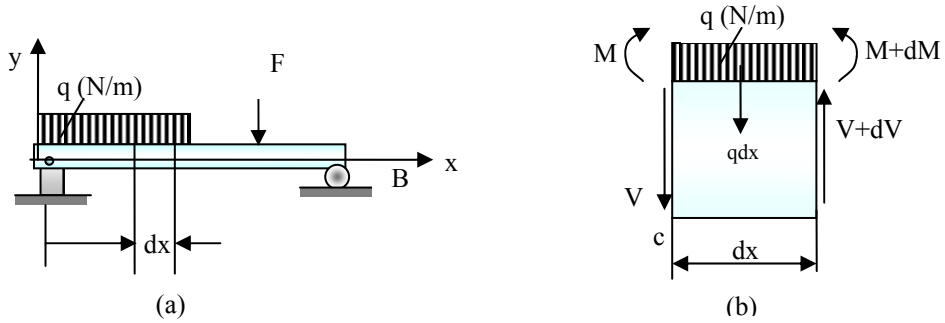
Burada;

V(N) =*Kesme kuvveti*

N(N)= *Normal kuvvet*

M(Nm)=*Eğilme momentidir.*

7.3 KESME KUVVETİ İLE EĞİLME MOMENTİ ARASINDAKİ İLİŞKİ



Şekil 7.5 Kesme kuvveti Moment ilişkisi

Şekil 7.5 (a) deki kirişten dx boyunda bir eleman çıkartıp kesme kuvvetleri ve momentler pozitif yönlerde olacak şekilde yerleştirilir (Şekil 7.5 (b)). Burada kiriş boyu *dx* gibi bir diferansiyel olduğu için aynı şekilde kesme kuuvvti ve eğilme momenti *dx* boyunca bir değişime uğrayacaktır. Bir uçta *V* olan kesme kuvveti *V+dV* ve *M* olan eğilme momentide *M+dM* olacaktır. Toplam yayılı yük ise *qdx* dir. Kiriş parça çıkarmadan önce dengede olduğuiçin kirişten ayrılan parçada dengede olmalıdır. O halde;

$\sum F_y = 0$ dan $V + dV - V - qdx = 0$ yazılabilir.

Buradan;

$\frac{dV}{dx} = -q$ bulunur. C noktasına göre moment alınırsa;

$$M + dM - M + (V + dV)dx - qdx(\frac{dx}{2}) = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

elde edilir. Burada ikinci dereceden küçükler (dv.dx gibi) ihmal edilmiştir. Yukarıdaki ifadelerden şu neticeler çıkarılır.

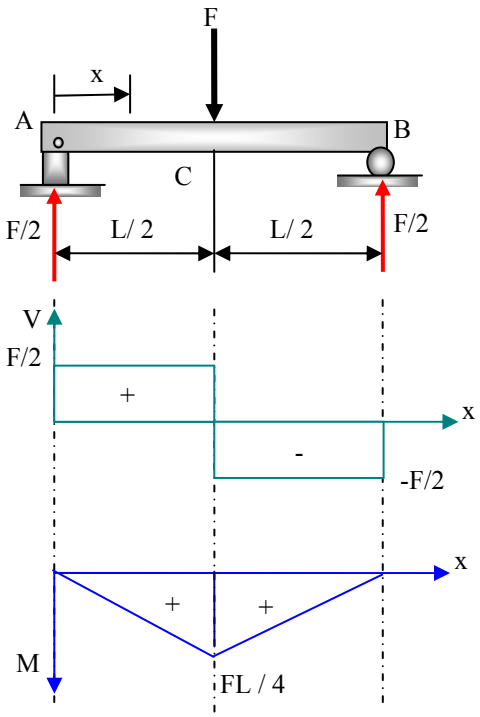
1. Kesme kuvveti sıfır ise moment maksimum veya minimumdur.

2. V=0 ise Momentin eğimi sıfır demektir. Buradan eğilme momentinin sabit olduğu söylenebilir.

3. İki nokta arasındaki kesme kuvvetinin alanı momente eşittir.

$$M = \int V dx$$

Örnek 7.1 Tekil yüke maruz basit kirişte kesme kuvveti ve eğilme momentini hesaplayıp diyagramlarını çiziniz.

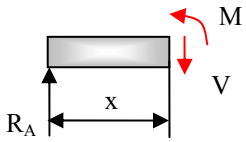


Şekil 7.6

Önce mesnet reaksiyonları bulunur. Simetrik olduğu için;
$R_A=R_B=F / 2$ dir.

Kiriş iki bölgeden meydana gelmiştir. Bölge sınırları, mesnetler, tekil yük uygulama noktaları, yayılı yük başlangıç ve bitişleri olarak tesbit edilir.
Burada kiriş iki bölgeden meydana gelmiştir. Birinci bölge kirişin AC kısmı ,ikinci bölge CB kısmıdır. Birinci bölgede A mesnedinden x kadarlık mesafeden ayırma prensibine göre hayali bir kesim yapılırsa,

AC Bölgesi ($0 \le x \le \frac{l}{2}$)



$\sum F_y = 0$ yazılırsa

R_A-V=0 ise V=$\frac{F}{2}$ elde edilir,

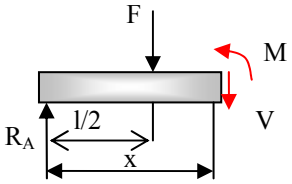
Kestiğimiz noktaya göre moment alırsak,

$$\sum M = 0 \Rightarrow M - R_A.x = 0 \Rightarrow M = \frac{F}{2}.x$$

x=0 da M=0

x= $\frac{l}{2}$ de M= $\frac{Fl}{4}$

CB Bölgesi ($\frac{l}{2} \le x \le l$)



Aynı işlemleri ikinci bölge için yaparsak,

$\sum F_y = 0$ ise R_A-F-V=0 ise V=-$\frac{F}{2}$ bulunur.

$$\sum M = 0$$

$$M - R_A.x + F.\left(x - \frac{l}{2}\right) = 0 \; ise \; M = \frac{F}{2}.x - F\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

x= $\frac{l}{2}$ de M= $\frac{Fl}{4}$

x=l de M=0 dır.

Bu değerler Şekil 7.6 daki grafikte görülebilir.

7.4 KESME KUVVETİ VE EĞİLME MOMENTİ DİYAGRAMLARININ PRATİK OLARAK ÇİZİLMESİ

Kesme Kuvveti : (dV / dx) = -q denklemi ile tanımlanmıştı. Buradan hareketle dV = -q.dx bulunur. Bunun A ve B noktalarındaki integrali :

$\int_{V_A}^{V_B} dV = \int_{x_a}^{x_b} q dx$ buradan $V_B = V_A + \int_{x_a}^{x_b} q.dx$

dir. Buradan görüleceği gibi, yayılı yük yok ise kesme kuvveti x eksenine paralel bir doğrudur. Düzgün yayılı yük varsa lineer bir doğrudur, Eğilme momenti ise:

$\frac{dM}{dx} = V$ ise $\int_{M_A}^{M_B} dM = \int_{X_A}^{X_B} V.dx$ ve $M_B = M_A + \int_{X_A}^{X_B} V.dx$

şeklinde bulunur. Buradan da görüleceği üzere b noktasındaki eğilme momenti, A noktasındaki eğilme momentinden A ve B arasındaki kesme kuvveti alanı çıkarılarak bulunur ve eğilme momenti diyagramının derecesi V' nin entegralinden dolayı kesme kuvvetinden bir derece daha fazladır.

7.4.1 Kesme Kuvvetinin Pratik Çizilmesi:

a-) Yukarı yönlenmiş kuvvetler yukarı doğru ve aşağıya doğru yönlenmiş kuvvetler aşağı doğru çizilir.

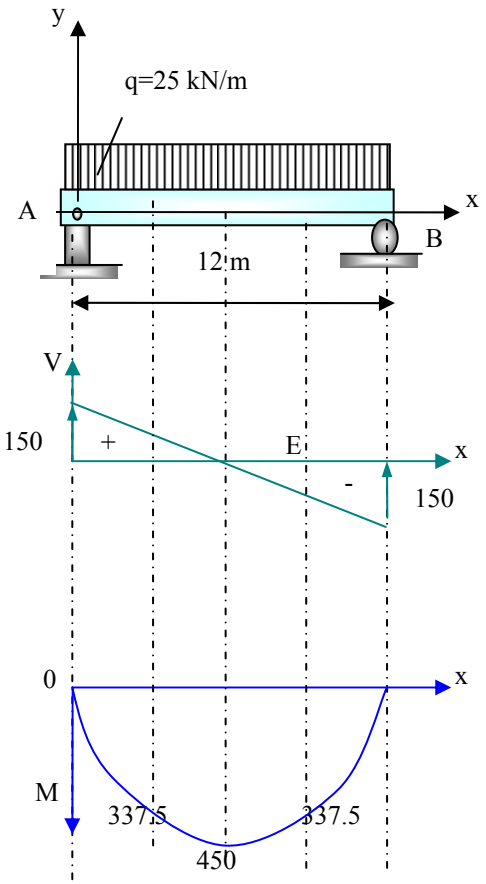
b-) Kuvvetlerin bulunmadığı aralıklarda kesme kuvveti x eksenine paralel bir doğru, düzgün yayılı yük için lineer bir doğru ve üçgen yayılı yük için ikinci dereceden bir doğrudur.

7.4.2 Eğilme Momentinin Pratik Çizilmesi:

a-) Bir noktadaki eğilme momenti, kendisinden bir önceki eğilme momentinden, bu iki nokta arasındaki kesme kuvvetinin alanın toplanması veya çıkarılmasıyla elde edilir.

b-) Eğilme momenti diyagramının derecesi kesme kuvvetinin derecesinden bir fazladır.

Örnek 7.2 Şekil 7.7' deki basit mesnetli kiriş, kiriş boyunca q=25 kN/m üniform yayılı yüke maruzdur. Kiriş boyunca kesme kuvveti ve momentinin değişimini diyagramlarını çizerek gösteriniz.



Şekil 7.7

$$R_A = R_B = \frac{25\ x12}{2} = 150\ kN$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V = R_A - 25.x$$

$$V = 150 - 25.x$$

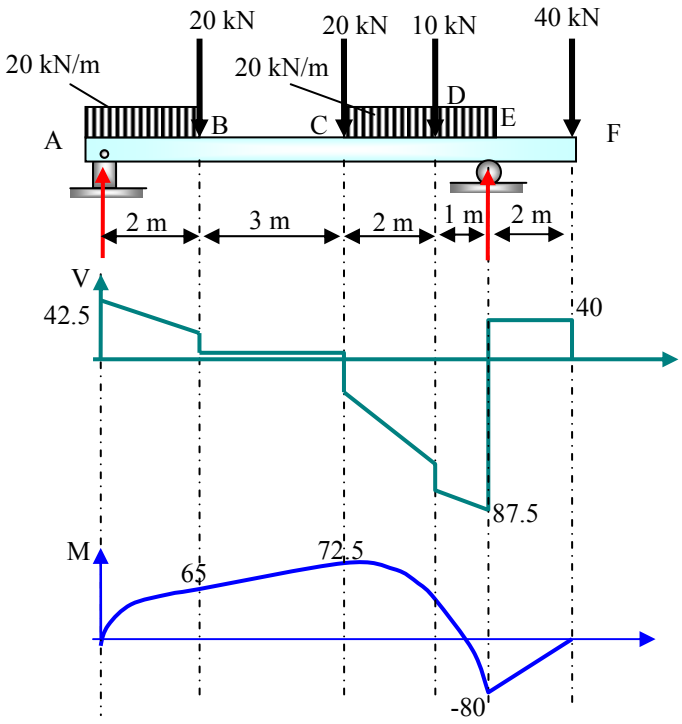
$$\sum M = 0$$

$$M + 25.x.\frac{x}{2} - R_A.x = 0$$

$$M = 150 - 25.\frac{x^2}{2}$$

*A'da (x=0); V=150 kN, M=0
*C'de (x=3m)
V=75 kN, M=337,5 kNm
*D'de (x=6m)
V=0, M=450 kNm
*E de (x=9m)
V=-75 kN, M=337,5 kNm
*D de (x=12m)
V=-150 kN, M=0

Örnek 7.3 Üniform yayılı yük ve tekil yüklerin birlikte etki etmesi durumunda kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramının çiziniz.



E' ye göre moment alırsak;

$$(R_A x8) + (40x2) = (10x2x7) + (20x6) + (20x3) + (10x1) + (20x3x1{,}5)$$

$$8R_A + 80 = 420 \qquad \text{Şekil 7.8}$$

$$R_A = 42{,}5kN$$

A' deki kesme kuvveti V=42,5 kN $\sum F_y = 0$ dan

$$R_A + R_E = (10x2) + 20 + 20 + 1 + (20x3) + 40 = 170$$

$$R_E = 127{,}5kN$$

Burada pratik olarak yukarı olan kuvvetler yukarı aşağı olan kuvvetler aşağı ve kuvvet olmayan yerde x eksenine paralel ve yayılı kuvvetin altında azalan bir doğru olacak şekilde kesme kuvveti diyagramını çizebiliriz. Eğilme momenti diyagramını cizebilmek için sınırlardaki değerler bulunursa bunların birleştirilmesiyle eğri çizilir.

M_A = 0 (a mesnetinde)

M_B = (42,5 x 2)-(10 x 2 x 1) = 85 – 20 = 65 kNm

M_C = (42,5 x 5)-(10 x 2 x 4)-(20 x 3) =72,5 kNm

M_D = (42,5 x 7)-(10 x 2 x 6)-(20 x 5)-(20 x 2)-(20 x 2 x 1)

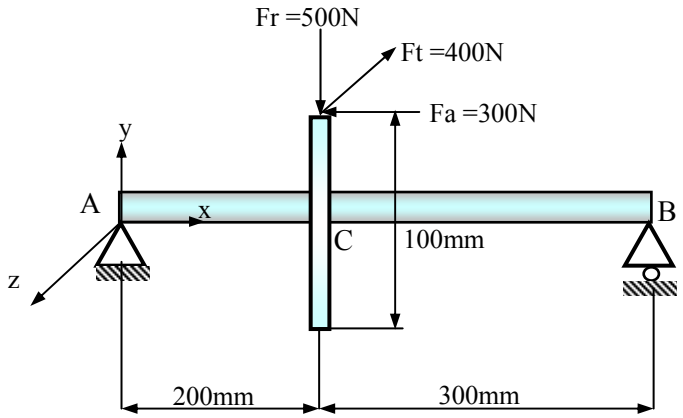
= 297,5-120-100-40-40 = 297,5-300 = -2,5 kNm

M_E = (-40 x 2) sağ el tarafından çalıştırılacak =-80 kNm

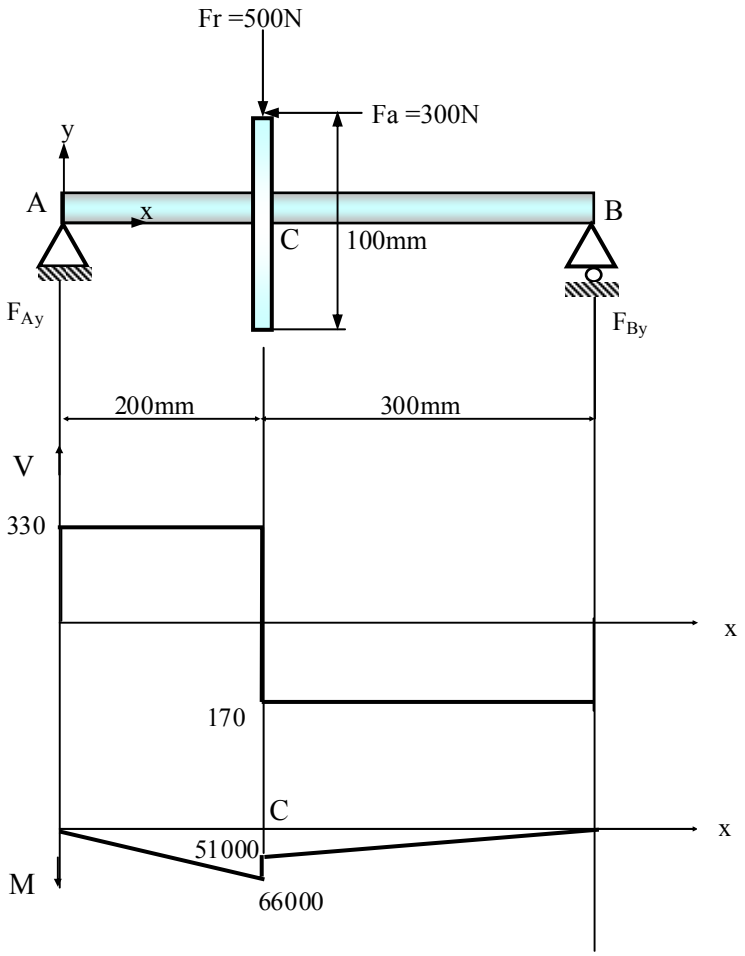
M_F = 0

Eğriyi tam olarak çizebilmek için kiriş üzerindeki her bir üniform yayılı yük için uç değerlerin yanında bir ya da iki orta değerlerinde alınması yararlı olur.

Örnek 7.4 Verilen dişli mil sisteminde, eğilme burulma momentleri ile kesme ve normal kuvvet diyagramlarını çiziniz.



xy düzlemi:



$$\sum M_A = 0$$

$$F_r.200 - F_a.50 - F_{By}.500 = 0$$

$$500.200 - 300.50 - F_{By}.500 = 0$$

$$F_{By} = 170N,\ F_{Ax} = 300N$$

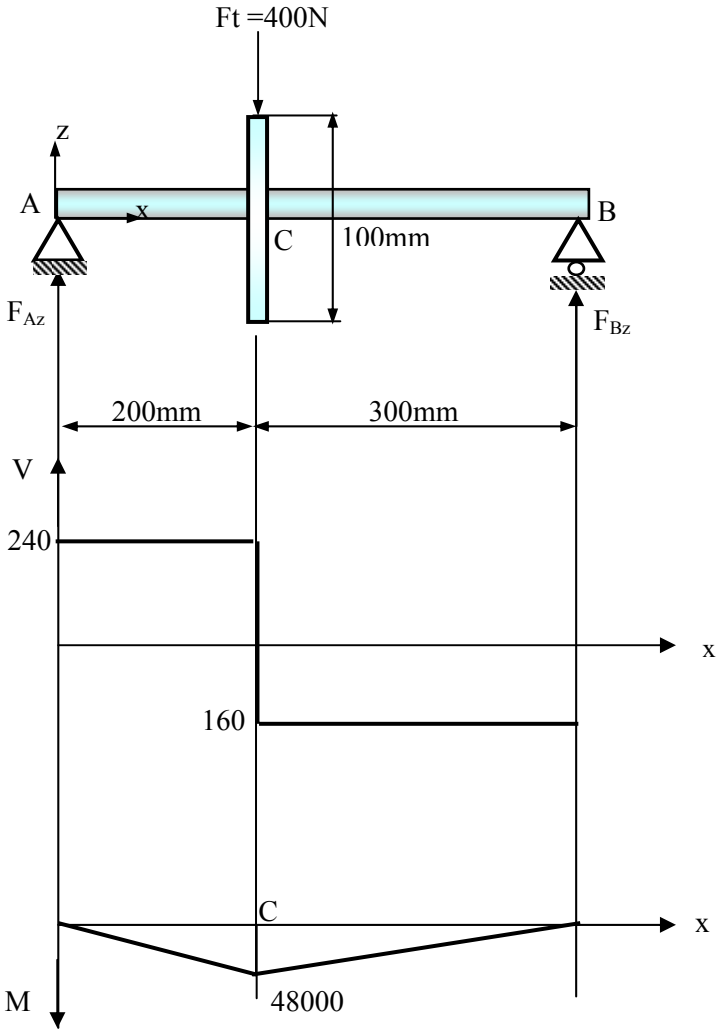
$$\sum F_Y = 0$$

$$F_{Ay} + F_{By} - F_r = 0$$

$$F_{Ay} = 500 - 170 = 330N$$

$$(M_z)_C = 330.200 = 66000Nmm$$

xz düzlemi:



$$\sum M_A = 0$$

$$F_t.200 - F_{Bz}.500 = 0$$

$$400.200 - F_{Bz}.500 = 0$$

$$F_{Bz} = 160N$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_{Az} + F_{Bz} - F_t = 0$$

$$F_{Az} = 400 - 160 = 240N$$

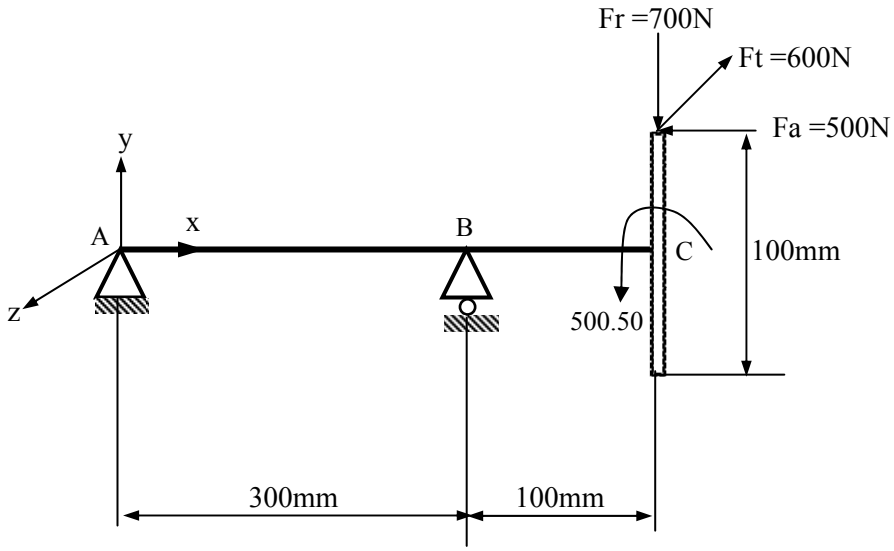
Yatak Kuvvetleri:

$$F_A = \sqrt{F_{Ay}^2 + F_{Az}^2} = \sqrt{330^2 + 240^2} = 408N$$

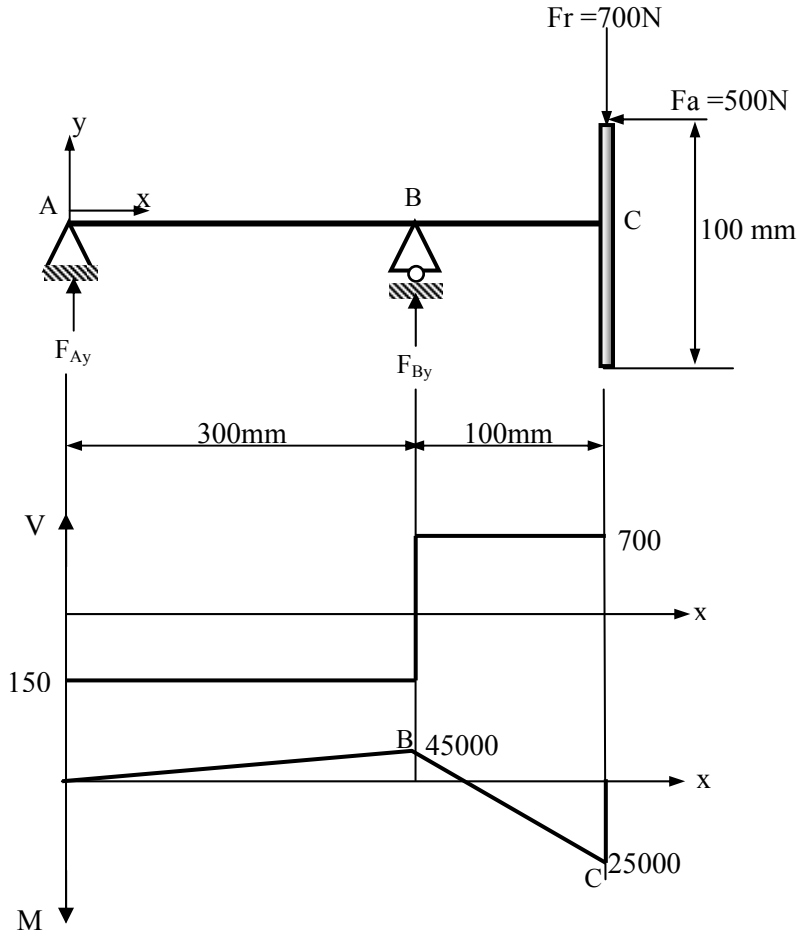
$$F_B = \sqrt{F_{By}^2 + F_{Bz}^2} = \sqrt{170^2 + 160^2} = 233{,}45N$$

$$M_C = \sqrt{66000^2 + 48000^2} = 81608{,}8Nmm$$

Örnek 7.5 Verilen dişli mil sisteminde, eğilme burulma momentleri ile kesme kuvvetleri ve normal kuvvet diyagramlarını çiziniz.



xy düzlemi:



$\sum M_A = 0$

$F_{BY}.300 - 700.400 + 500.50 = 0$

$F_{By} = 850N$

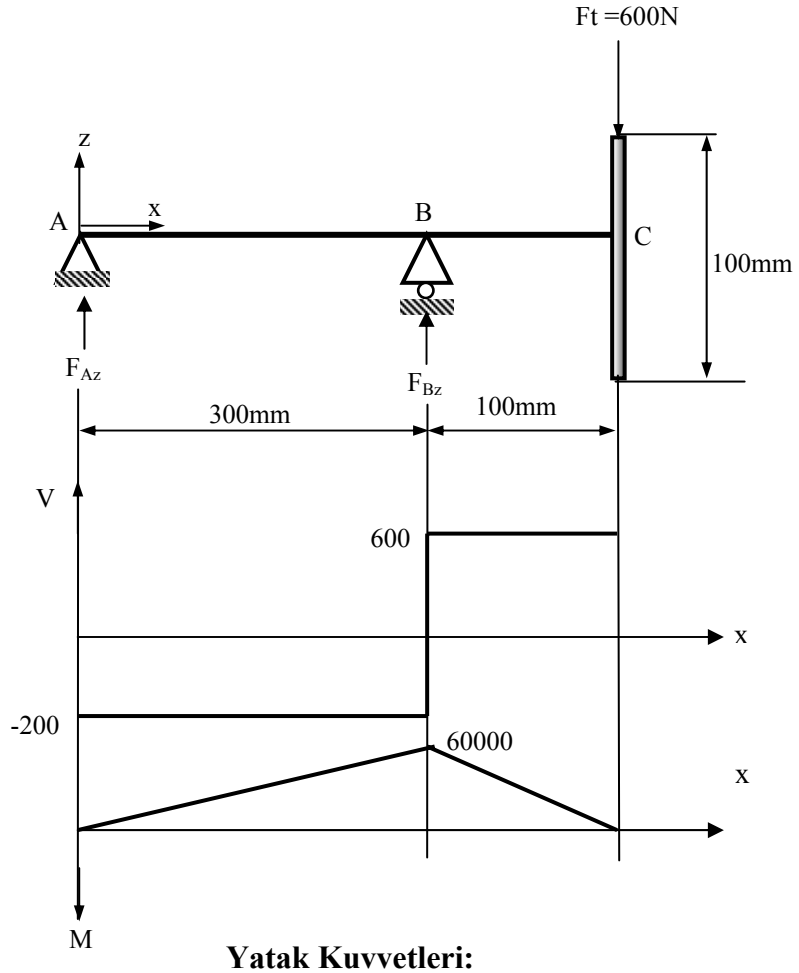
$\sum F_Y = 0$

$F_{Ay} + 850 - F_r = 0$

$F_{Ay} = -150N$ (Yönü aşağı doğru)

$(M_z)_B = -45000Nmm$, $(M_z)_C = 25000Nmm$

xz düzlemi:



$\sum M_A = 0$

$-F_{Bz}.300 + 600.400 = 0$

$F_{Bz} = 800N$

$\sum F_z = 0$

$F_{Az} + F_{BZ} - F_t = 0$

$F_{Az} = -200N$ (Yönü aşağı doğru)

Yatak Kuvvetleri:

$F_A = \sqrt{F_{Ay}^2 + F_{Az}^2} = \sqrt{(-150)^2 + (-200)^2} = 250N$

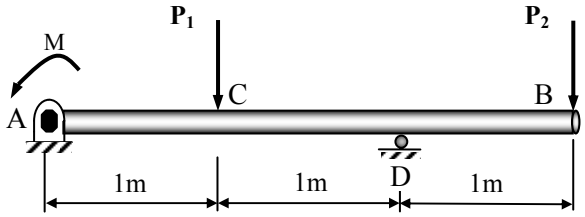
$F_B = \sqrt{F_{By}^2 + F_{Bz}^2} = \sqrt{850^2 + 800^2} = 1167,2N$

$(M_y)_B = 60000\ Nmm$

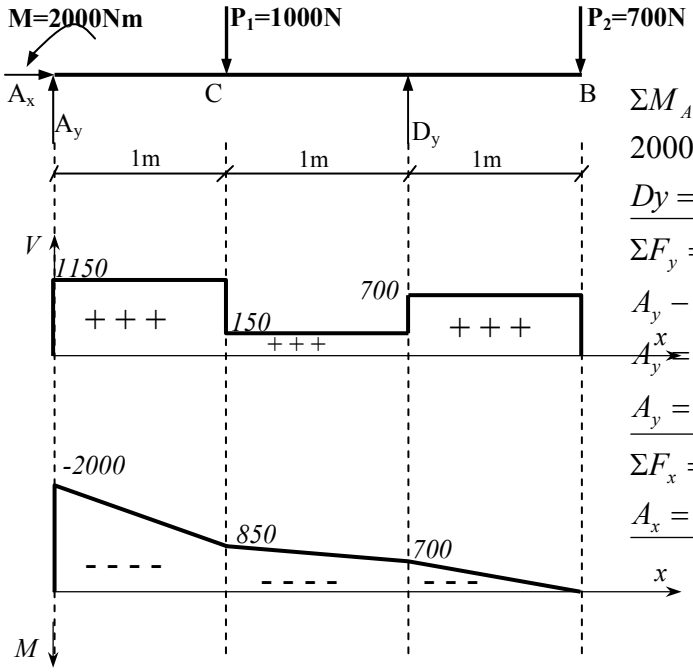
$M_B = \sqrt{(-45000)^2 + 60000^2} = 75000Nmm$

7.5 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1)



Verilen kirişte kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.
P_1= 1000N
P_2= 700N
M= 2000Nm



$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$

$2000 - 1000.1 + Dy.2 - 700.3 = 0$

$\underline{Dy = 550N}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$A_y - 1000 - 700 + Dy = 0$

$A_y = 1000 + 700 - 550$

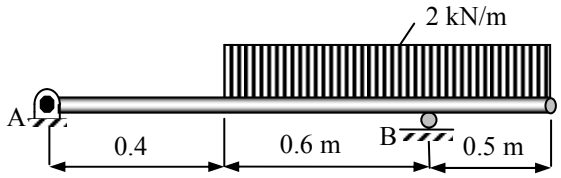
$\underline{A_y = 1150N}$

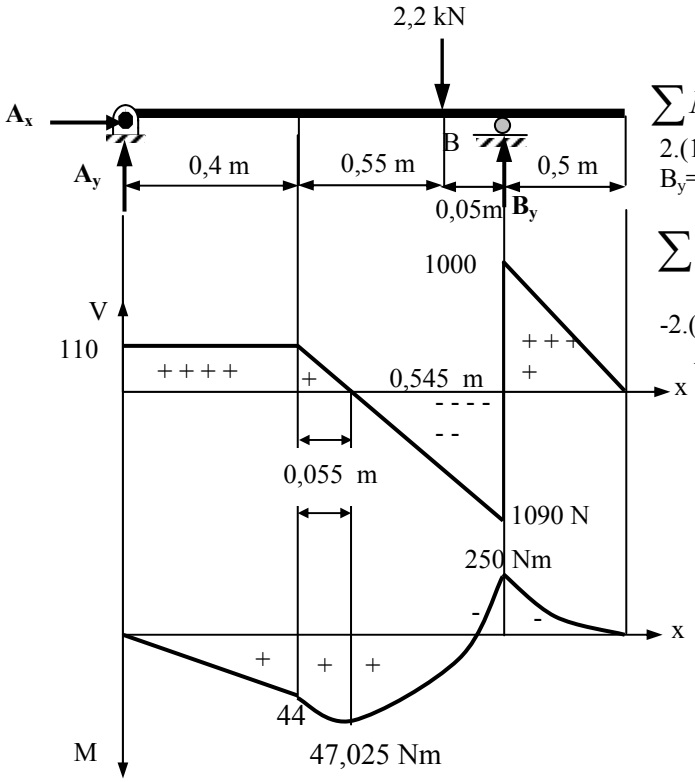
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$

$\underline{A_x = 0}$

Problem 2)

Şekilde verilen kirişin kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.





$\sum M_A = 0$

$2.(1,1).0,95-B_y.1,0 = 0$

$B_y=2,09$ kN = 2090 N

$\sum F_Y = 0$

$-2.(1,1)+A_y+B_y = 0$

$A_y = 0,11$ kN = 110 N

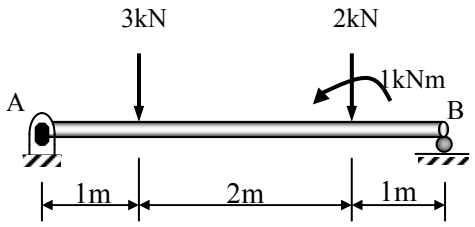
$A_x = 0$

$$\frac{x}{0,6-x} = \frac{110}{1090}$$

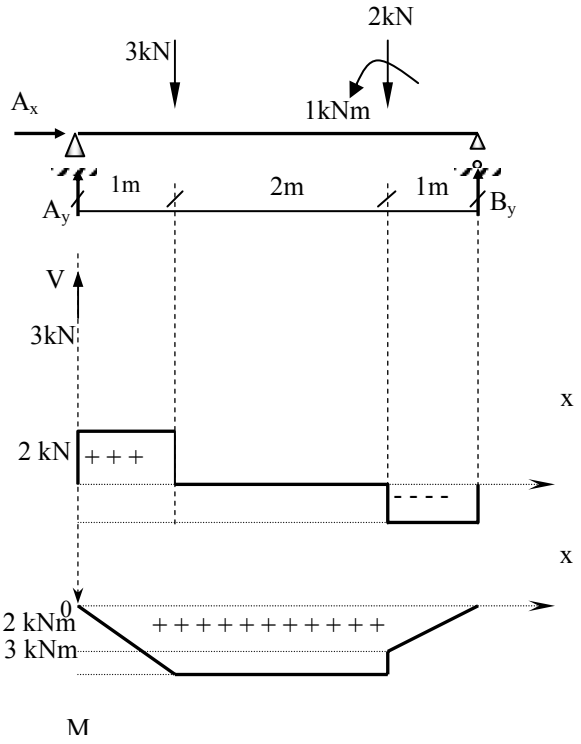
$1090.x=66-110.x$

x= 0,055 m

Problem 3)



Kesme kuvveti eğilme moment diyagramlarını çiziniz.

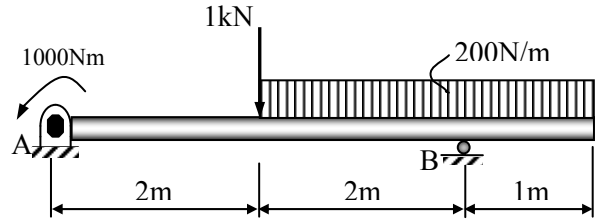


$\Sigma M_A=0$
$-3.1 - 2.3 + 1 + 4B_y = 0$
$-3 - 6 + 1 = -4B_y$
$\underline{B_y = 2\ kN}$

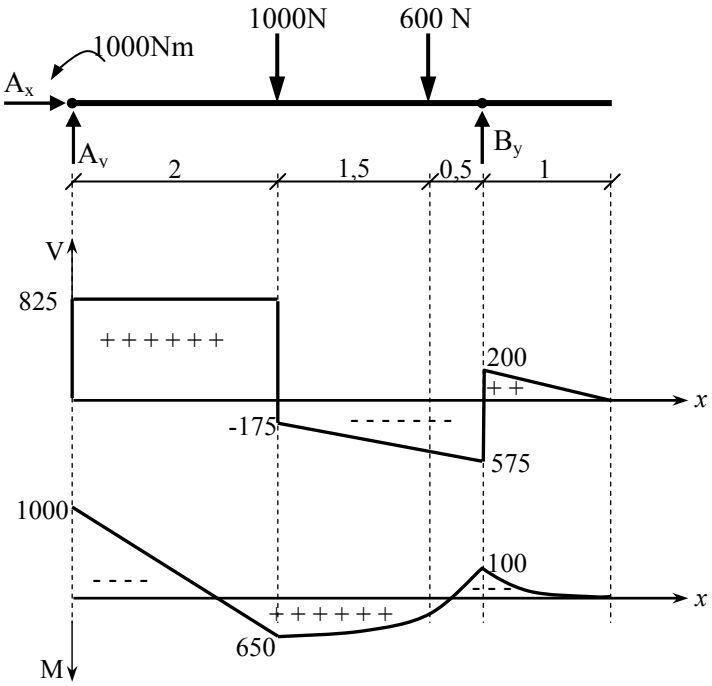
$\Sigma Fy=0$
$-5 + A_y + B_y = 0$
$\underline{A_y = 3\ kN}$

$\Sigma F_x=0$
$\underline{A_x = 0}$

Problem 4)



Şekilde verilen kirişin kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.



+ ΣMA=0

-1000.2+1000-600.3,5+4.By=0

⇒ By=775 N

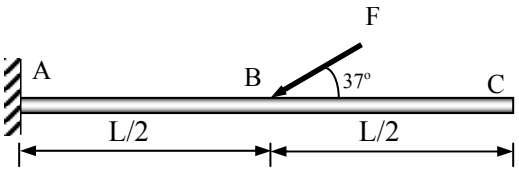
ΣFy=0

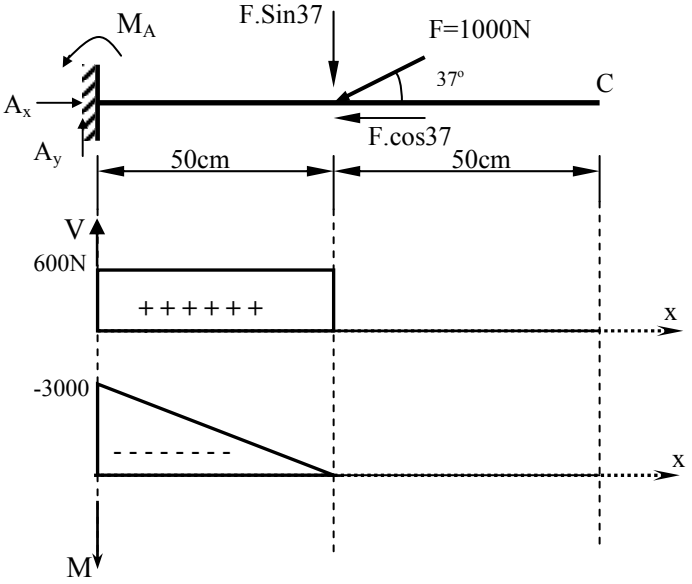
⇒ Ay=825 N

Problem 5)

Kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.

L=100 cm
F=1000N



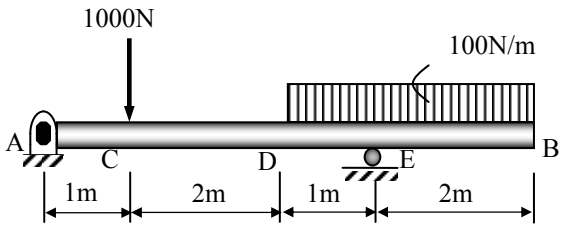


$\Sigma M_A=0$
$M_A=F.sin37.50$
$M_A=1000.sin37.50$
$M_A=30000$ Ncm

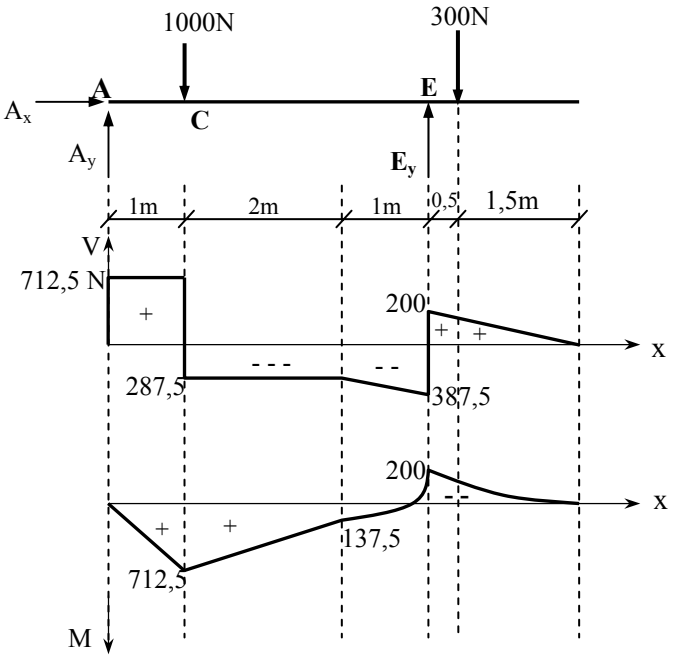
$\Sigma Fy=0$
$A_y=F.sin37$
$A_y=1000.sin37$
$A_y=600$ N

$\Sigma F_x=0$
$A_x=F.cos37$
$A_x=798,6$ N

Problem 6)



Verilen kirişte kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.



$$\sum M_A = 0$$

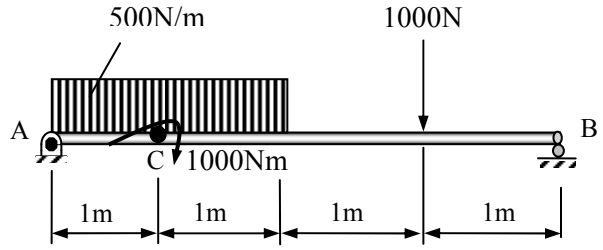
$$-1000.1 - 300.4{,}5 + E_y.4{,}5 \Rightarrow E_y = 587{,}5N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 712{,}5N$$

$$A_x = 0$$

Problem 7)

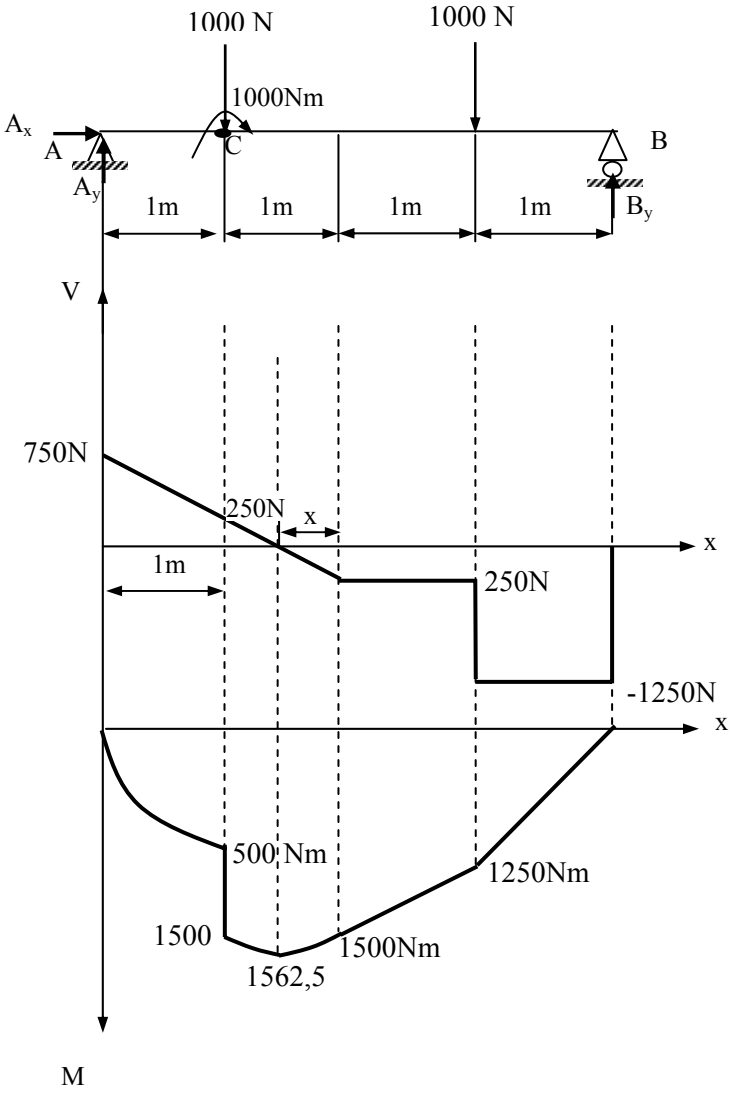


Kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.

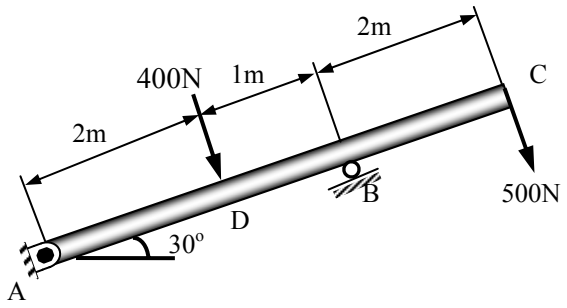
$$\sum M_A = 0$$
$$-1000-1000.1-1000.3+4.B_y = 0$$
$$B_y = 1250N$$

$$\sum F_y = 0$$
$$1000+1000 = A_y + B_y$$
$$2000 = A_y + B_y$$
$$A_y = 750N$$
$$A_x = 0$$

$$\frac{250}{750} = \frac{x}{2-x}$$
$$500 - 250.x = 750x$$
$$500.x = 1000$$
$$x = 0{,}5m$$



Problem 8)



Verilen kirişte kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.

$$\sum M_A = 0$$

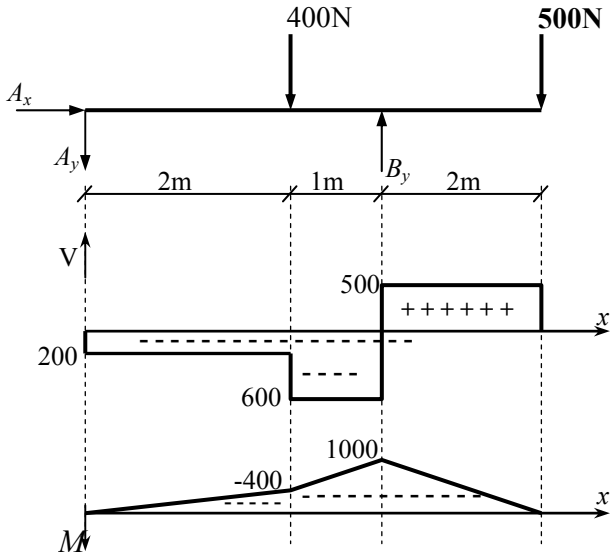
$$400.2 - B_y 3 + 500.5 = 0$$

$$B_y = 1100N$$

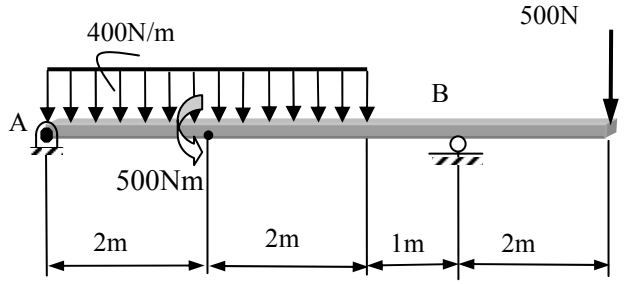
$$\sum F_y = 0$$

$$-A_y - 400 + 1100 - 500 = 0$$

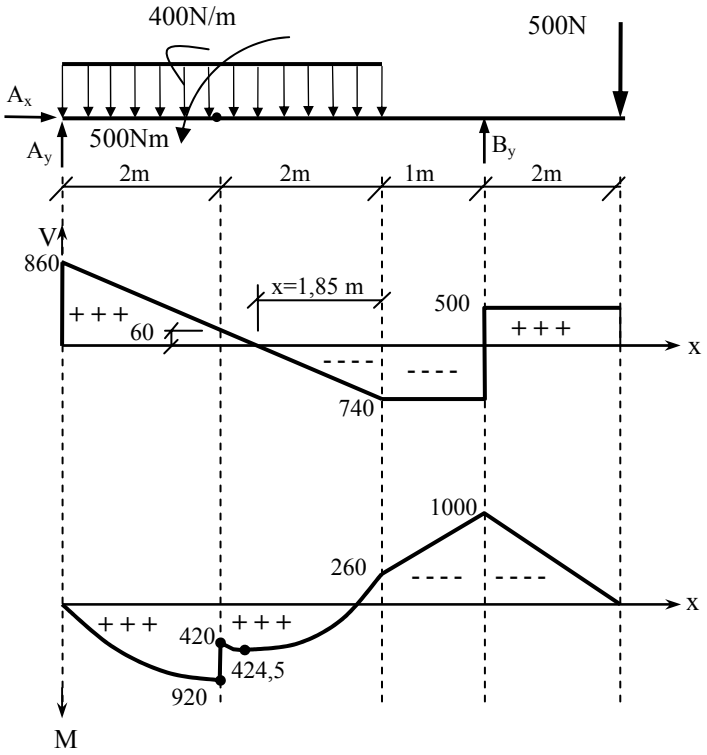
$$A_y = 200N \;\rightarrow\; A_x = 0$$



Problem 9)



Kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.



$$-(400.4).2 + 500 + By.5 - 500.7 = 0$$

$$By = \frac{6200}{5} = 1240\,N$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$-1600 + Ay + 1240 - 500 = 0$$

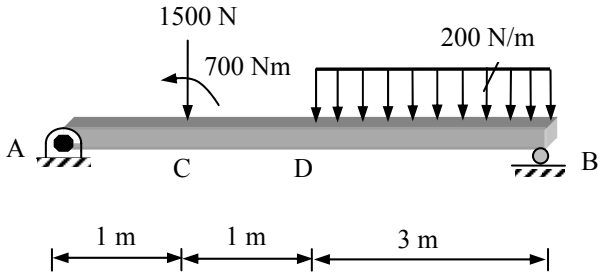
$$Ay = 860\,N$$

$$Ax = 0$$

$$\frac{740}{860} = \frac{x}{4-x} \Rightarrow x = 1{,}85\,m$$

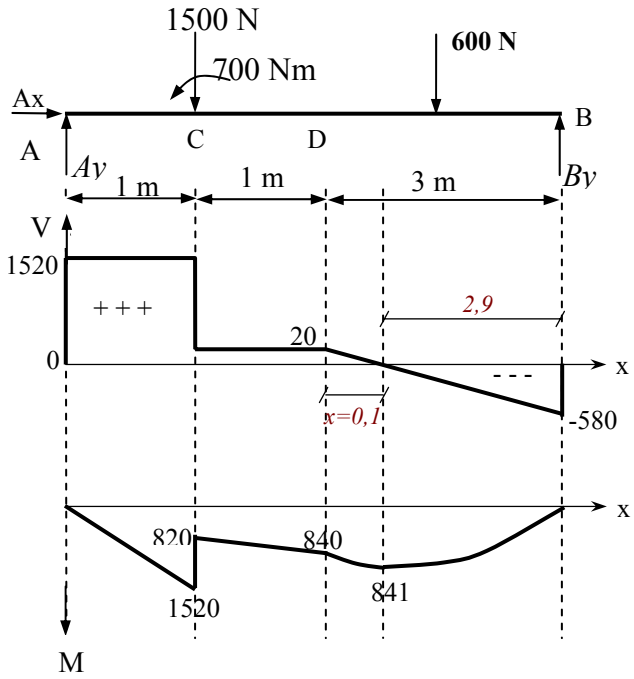
$$\frac{y}{860} = \frac{0{,}15}{2{,}15} \Rightarrow y = 60\,N$$

Problem 10)



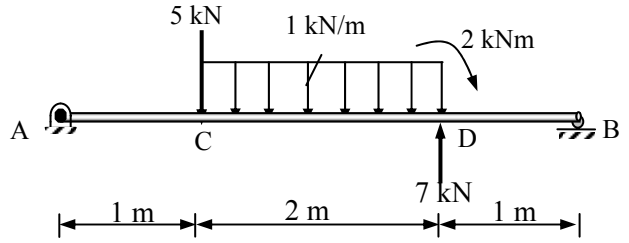
Kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.

$$\sum M_A = 0$$
$$-1500.1 + 700 - (200.3).3{,}5 + B_y.5 = 0$$
$$B_y = 580N$$
$$\sum F_y = 0$$
$$1500 + 600 = 580 + A_y$$
$$A_y = 1520\,N$$

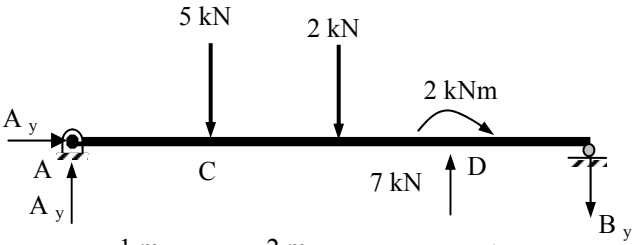


$$\frac{x}{3-x} = \frac{20}{580}$$
$$580.x = 60 - 20.x$$
$$x = 0{,}1\ m$$

Problem 11)



Şekilde verilen kirişte kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.



$$\sum M_A = 0$$

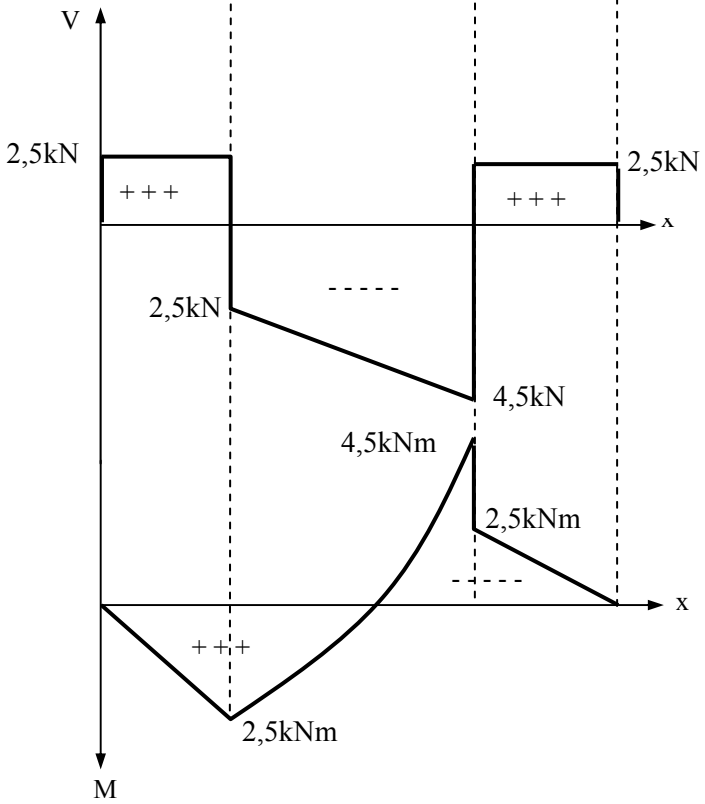
$$5.1 + 2.2 + 2 - 7.3 - B_y.4 = 0$$

$$B_y = -2{,}5\,kN \downarrow$$

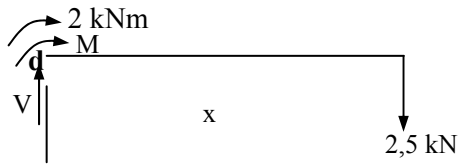
$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - 5 - 2 + 7 - 2{,}5 = 0$$

$$A_y = 2{,}5\,kN \uparrow$$



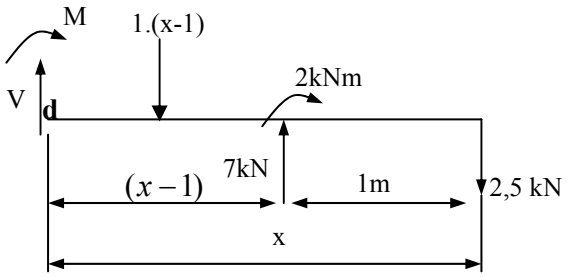
BD.....Bölgesi $0 \le x \le 1$



$$\sum F_y = 0$$
$$-2,5 + V = 0$$
$$V = 2,5\ kN$$
$$\sum M_d = 0$$
$$M = -2,5x - 2$$

CD.....Bölgesi

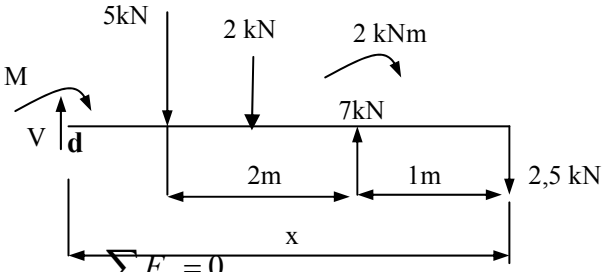
$2 \le x \le 3$



$$\sum F_y = 0$$
$$V = -4,5 + (x-1)$$
$$\sum M_d = 0$$
$$-M - (x-1).\frac{(x-1)}{2} + 7.(x-1) - 2,5.x = 0$$
$$M = 7.(x-1) - 2,5.x - \frac{(x-1)^2}{2}$$

AC....Bölgesi

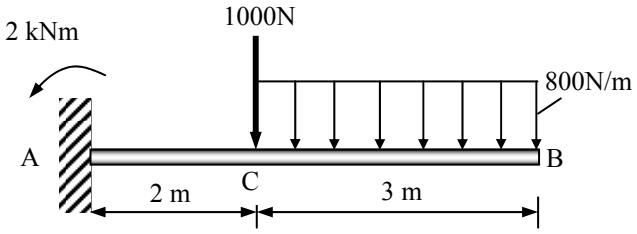
$3 \le x \le 4$



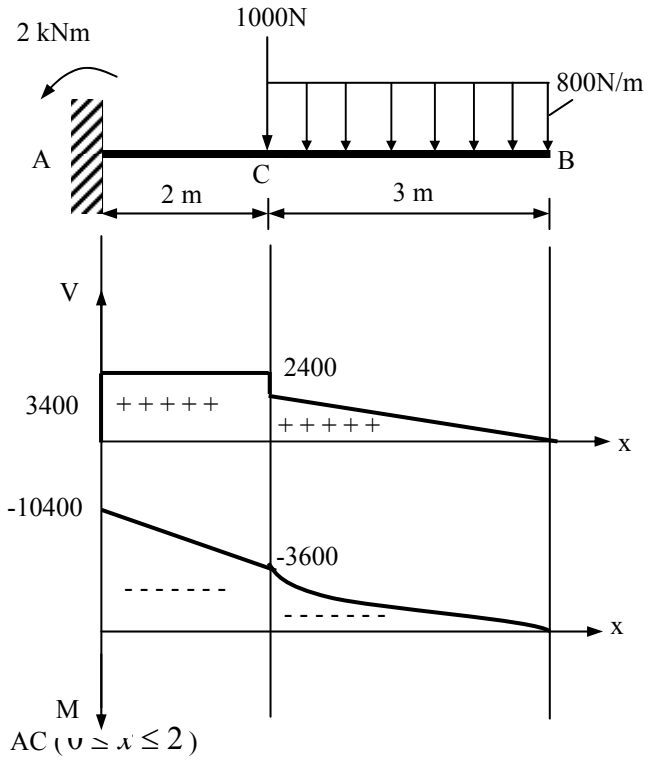
$$\sum F_y = 0$$
$$-2,5 + 7 - 5 - 2 + V = 0$$
$$V = 2,5\ kN$$

$$\sum M_d = 0$$
$$-M - 5(x-3) - 2(x-2) + 7(x-1) - 2,5x - 2 = 0$$
$$M = 10 - 2,5x$$

Problem 12)



Şekilde verilen ankastre kirişte kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.



$$\sum M_A = 0$$

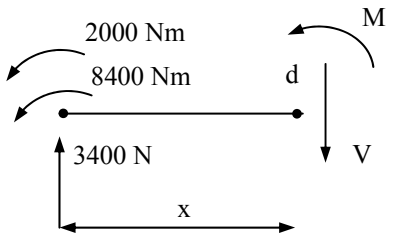
$$M_A + 2000 - 1000.2 - 3.800.3{,}5 = 0$$

$$M_A = 8400 Nm$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - 1000 - 2400 = 0$$

$$A_y = 3400 N$$



$$\sum M_d = 0$$

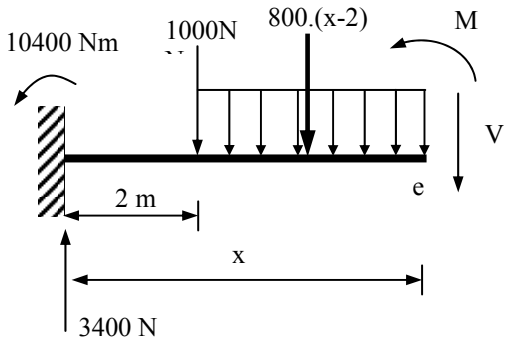
$$M + 10400 - 3400.x = 0$$

$$M = 3400.x - 10400$$

$$x = 0 ---- M = -10400 Nm$$

$$x = 2 ---- M = -3600 Nm$$

CB ($2 \le x \le 5$)



$$\sum F_y = 0$$

$$3400 - 1000 - 800.(x-2) - V = 0$$

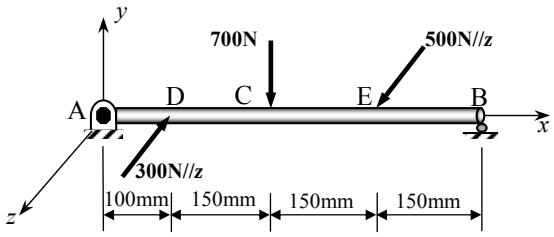
$$V = -800(x-2) + 2400$$

$$\sum M_e = 0$$

$$M + 10400 - 3400.x + 1000.(x-2) + \frac{800}{2}.(x-2)^2 = 0$$

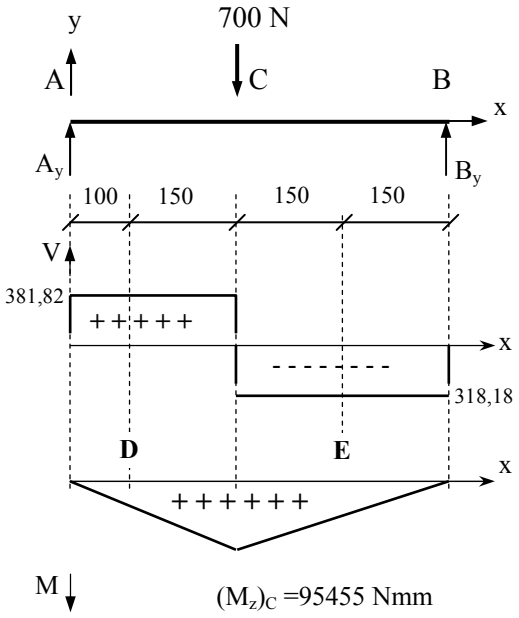
$$M = -10400 + 3400x - 1000(x-2) - 400(x-2)^2$$

Problem 13)

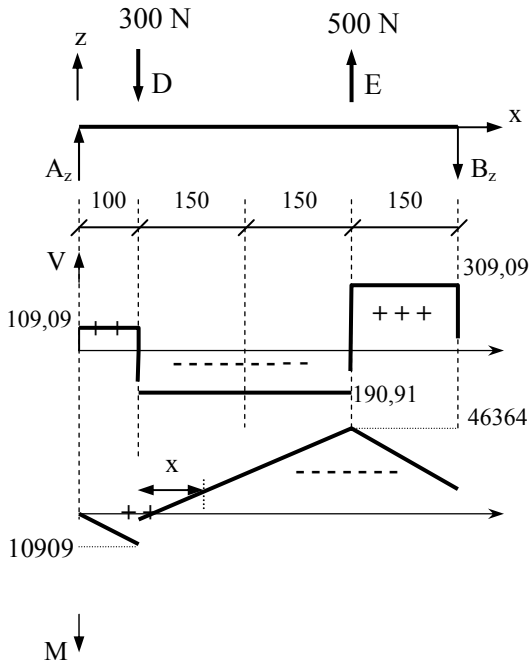


Farklı düzlemlerde verilen kuvvetleri dikkate alarak mesnet reaksiyonlarını bulunuz. Maksimum momentin nerede ve ne kadar olduğunu hesaplayınız.

xy düzlemi



xz düzlemi



ΣMA=0

$700.250=B_y.550 \Rightarrow B_y=318,18$ N

ΣFy=0 $\Rightarrow$ $A_y=381,82$ N

$(M_z)_C$ =95455 Nmm
$(M_z)_D$ =(100.95455)/250=38182 Nmm
$(M_z)_E$ =95455/2=47727,5 Nmm

Mesnet Reaksiyonları:

$$A=\sqrt{A_y^2+A_z^2}=397,1N$$

$$B=\sqrt{B_y^2+B_z^2}=443,6N$$

ΣMA=0

$-300.100+B_z.550+500.400=0 \Rightarrow B_z=-309,09$ N

ΣFz=0 $\Rightarrow$ $A_z+B_z-300+500=0$

$A_z=109,09$ N

$$\frac{x}{300-x}=\frac{10909}{46364}\Rightarrow 57,142\ mm$$

$$\frac{92,858}{242,858}=\frac{(M_z)_C}{46364}\Rightarrow (M_z)_C=17727,5\ Nmm$$

$(M_y)_C$ =(46364.92,858)/242,858=17727,5 Nmm
$(M_y)_D$ =10909 Nmm
$(M_y)_E$ =46364 Nmm

MC=$\sqrt{(M_y)_C^{\,2}+(M_z)_C^{\,2}}$ $\Rightarrow$ MC=97087 Nmm

MD=$\sqrt{(M_y)_D^{\,2}+(M_z)_D^{\,2}}$ $\Rightarrow$ MD=39709,84 Nmm

ME=$\sqrt{(M_y)_E^{\,2}+(M_z)_E^{\,2}}$ $\Rightarrow$ ME=66539,72 Nmm

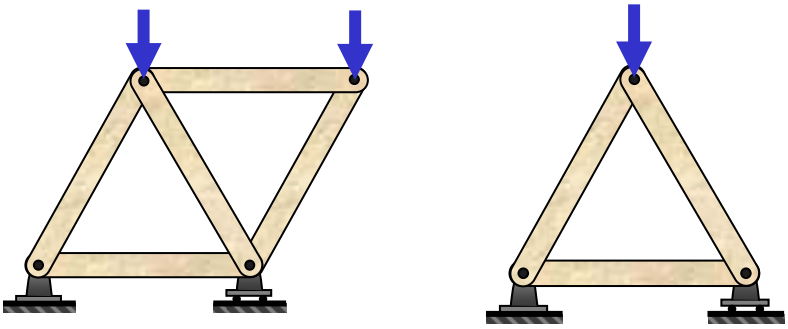
} Maximum moment C noktasında oluşur.

BÖLÜM 8

KAFES SİSTEMLERİ

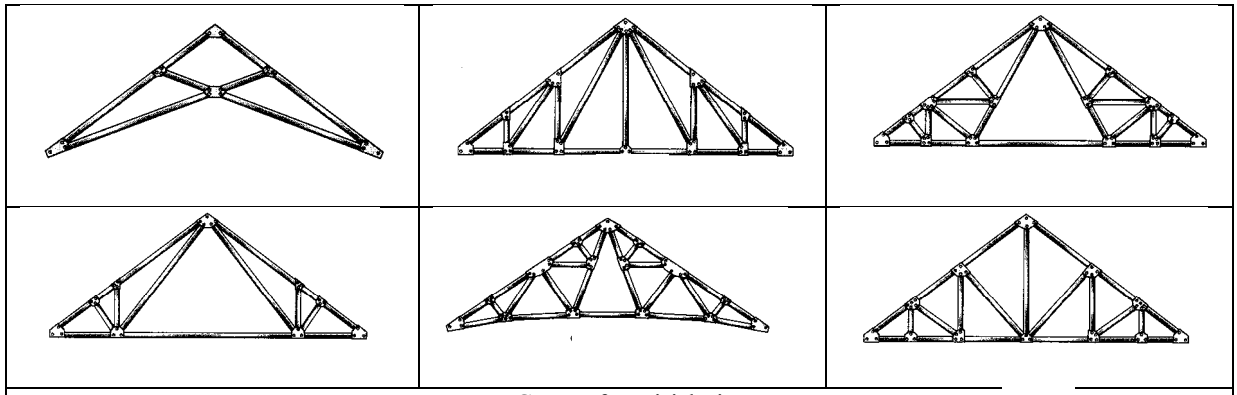
8.1 BİR KAFES SİSTEMİN TANIMI

Kafes sistemleri, mühendislikte kullanılan taşıyıcı sistemlerinin tiplerinden biridir. Birçok mühendislik probleminde, özellikle vinç, köprü ve bina projelerinde pratik ve ekonomik bir çözüm sağlar. Bir kafes sistemi, düğüm noktalarında birleşen doğru eksenli çubuklardan meydana gelir; tipik bir kafes sistem Şekil 8.1'de gösterilmiştir. Kafes sistemin çubukları yalnız uç noktalarında birbirlerine bağlanmıştır. Gerçek taşıyıcı sistemler birçok düzlem kafes sistemin bir uzaysal sistem oluşturacak şekilde birleştirilmesinden yapılmıştır. Her kafes sistemi, kendi düzleminde etkiyen yükleri taşıyacak şekilde projelendirildiğinden, iki boyutlu kafes sistem temel olmaktadır. Burada onun için öncelikle iki boyutlu kafes sistemleri ele alınacaktır.

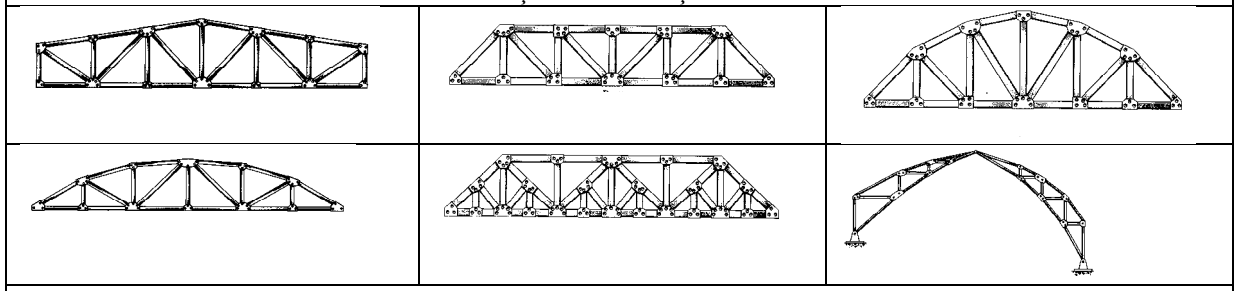


Şekil 8.1

Genel olarak, bir kafes sistemin elemanları narindir ve eksenine dik doğrultudaki yükleri taşıyamaz; bundan dolayı bütün yükler, çubukların kendilerine değil, düğüm noktalarına uygulanmalıdır. İki düğüm noktası arasına bir yayıllı yük uygulananacağı zaman bu yükler komşu düğümlere paylaştırılacak şekilde kafes sistemi dizayn edilir.



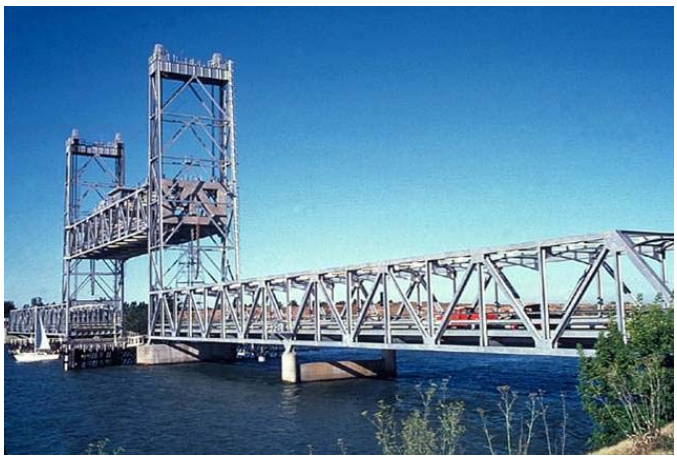
Çatı Kafes Kirişleri



Köprü Kafes Kirişleri

Şekil 8.2

Kafes sistemi, çubuklarının ağırlıklarını da çubuğun birleştirdiği iki düğüm noktasına paylaştırılır. Çubuklar perçin yada kaynak ile birleştirilirler. Birleşme yerleri sürtünmesiz mafsallı birleştirme olarak kabul edilir. Bunun için bir çubuğun her iki ucuna etkiyen kuvvetler eksenel doğrultuda etkir, moment meydana gelmez. Buna göre çubuk yalnız normal kuvvet etkisindeki bir eleman olarak ele alınabilir ve bütün kafes sistem bir mafsallar ve normal kuvvet etkisindeki elemanlar grubu olarak kabul edilebilir.



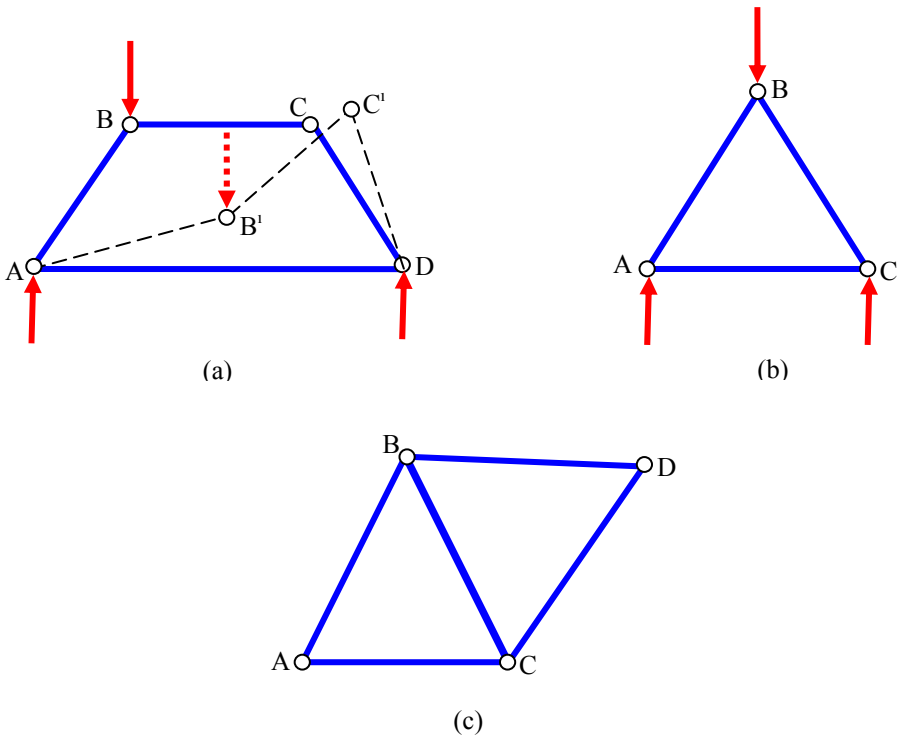


Şekil 8.2.1

8.2 BASİT KAFES SİSTEMLERİ

A, B, C ve D mafsalları ile birbirine bağlanmış dört çubuktan oluşan, Şekil 8.3(a)'deki kafes sistemi göz önüne alalım. B noktasına herhangi bir yük uygulanırsa, kafes sistem büyük ölçüde şekil değiştirir ve ilk biçimini tamamen kaybeder. Diğer taraftan *A, B, C* mafsalları ile birbirlerine bağlanmış üç çubuktan oluşan Şekil 8.3(b) deki kafes sistem, B noktasında uygulanan bir yükten dolayı çok az şekil değiştirir. Bu kafes sistem için tek mümkün deformasyon, elemanlarının küçük boy değişimlerinden ibarettir. Şekil 8.3(b) deki kafes sistem bir rijit kafes sistem olarak anılır; burada rijit deyimi kafes sistemin göçmiyeceğini belirtmek üzere kullanılmıştır.

Şekil 8.3(b) deki baz üçgen kafes sisteme, BD ve CD gibi iki çubuk eklenerek Şekil 8.3(c)'de gösterildiği gibi, daha büyük bir rijit kafes sistem elde edilebilir. Bu işlem istenildiği kadar çok kere tekrarlanabilir, yeni iki çubuk eklemek, bunları mevcut iki ayrı düğüm noktasına bağlamak ve yeni bir düğüm noktasında birleştirmek şartı ile sonuç kafes sistem rijit olur.



Şekil 8.3

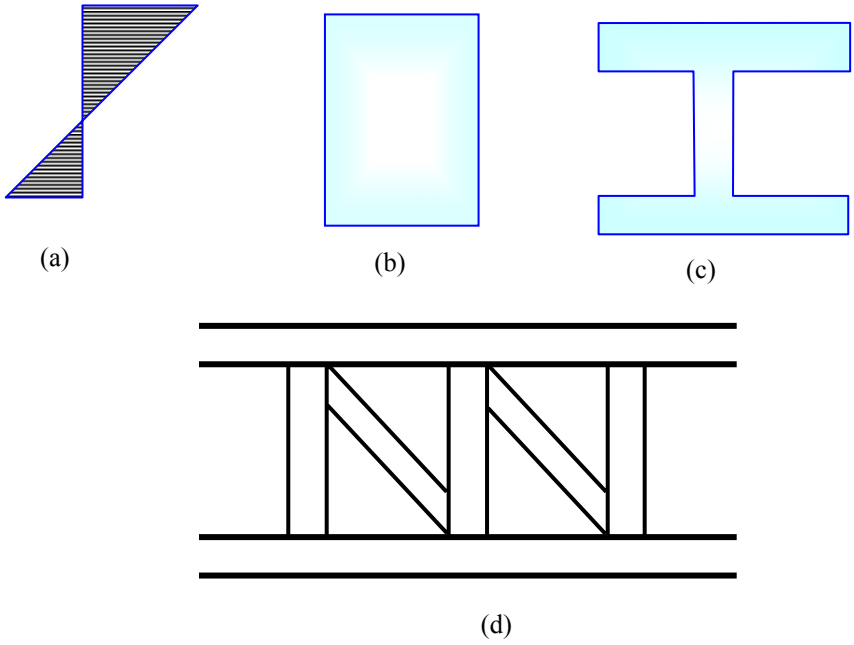
8.3 İZOSTATİK VE HİPERSTATİK SİSTEMLER

Bir katı cisme tesir eden düzlem kuvvetlerde denge şartları, birbirine bağlı olmayan üç denklem verir. Bilinmeyen sayısı bunlardan fazla olursa, denge şartları problemin çözümüne kâfi gelmez. Bu tip problemlere **"statik bakımdan belirsiz"** veya **"hiperstatik"** problemler denir.

Bilinmeyen sayısı denklem sayısından ne kadar fazla ise belirsizlik o derece yüksek olur. Belirli olan sistemlere **"izostatik"** sistemler denir.

8.4 KAFES SİSTEMLER İÇİN GENEL BİLGİLER

Taşıyıcı sistemlerin açıklıkları büyüdükçe dolu gövdeli sistemlerin, kendi ağırlıklarının artışından dolayısıyla ekonomik olmadığından yerlerini kafes ve çerçeve sistemlerine bırakırlar.



Şekil 8.4. Profil ve Bağlantılar

Şekil 8.4 (a)' da dolu bir çubuğun herhangi bir kesitinde basit eğilme halinde gerilme yayılışı görülmektedir. Burada orta kısımdaki liflerin üst ve alt kenarlardaki liflere nazaran kesit taşıyıcılığına daha az iştirak ettikleri görülmektedir. Çubuğun kendi ağırlığını

azaltmak için orta bölgenin bir kısmı sistemden çıkartılarak I kesitli dolu sistemler elde edilir.

Şekil 8.4(b)'de ve Şekil 8.4(c)'de daha büyük açıklıklarda ise orta kısım tamamıyla kaldırılıp bunun yerine kesme kuvvetini karşılamak üzere Şekil 8.4(d)'deki gibi çubuklar konarak çerçeve veya kafes sistemler elde edilir.

Kafes sistemler, yalnız normal kuvvetleri taşıyan doğru eksenli çubukların birleştirilmesinden meydana gelirler. Çubuklar sürtünmesiz bir mafsal ile birbirlerine bağlıdırlar. Buralara **"düğüm noktaları"** denir. Mafsallarla yapılmış sistemler ancak düğüm noktalarında yük taşırlar. Aksi halde tatbik edilen yüklerin momenti doğar ki, bunu da sürtünmesiz mafsallar taşıyamaz.

8.5 KAFES SİSTEMLERİNİN İZOSTATİK OLMA ŞARTI

Kafes sisteminin çubuklarında eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri sıfırdır. Yalnız normal kuvvetler vardır. Bunlara **"çubuk kuvvetleri"** denir. Kafes sistemde;

d = Düğüm noktası sayısını (mesnetler dahil)

r = Mesnet reaksiyonları sayısını

ç = Çubuk sayısını

göstersin. Her çubukta, bilinmeyen olarak bir çubuk kuvveti vardır. O halde reaksiyonlar ile birlikte bilinmeyenlerin toplam sayısı (r+ç) olur.

8.6 ÇUBUK KUVVETLERİNİN TAYİNİ

Kafese teşkil eden çubukların boyutları, her çubuğa gelen kuvvet ve zorlamaya göre hesaplanır. Bu hesaplamalarda iki esas kabul edilmektedir.

1. Çubukların birbirleriyle olan bağlanışı, sürtünmesiz mafsallı farzedilir. İki veya daha fazla çubuğun bir arada bağlandığı bu mafsala düğüm noktası denir. Mafsalların sürtünmesiz olduğunu kabul etmek, düğüm noktalarının moment taşımayacakları peşinen kabul edilir.

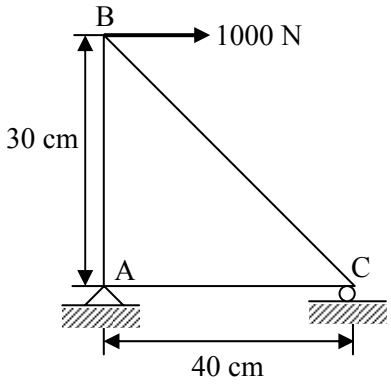
2. Kirişe gelen bütün dış kuvvetlerin düğüm noktalarında tesir ettiği yani çubuğun iki düğüm noktası arasındaki kısmına hiç bir dış kuvvetin tesir etmediği farzedilir.

Ayrıca çubuk kuvvetlerini tayin etmek için aşağıdaki metodlar kullanılır;

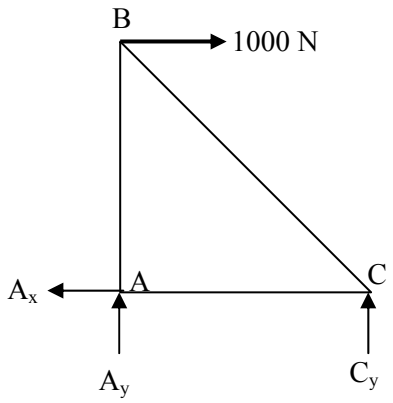
8.6.1 DÜĞÜM NOKTALARI DENGE METODU:

Bu metotla bir kafes sistemindeki çubuklara etkileyen kuvvetleri bulmak için, her bir düğüm noktasına etkiyen kuvvetler denge denklemleri uygulanır. Dolayısıyla bu metodda bir noktada kesişen kuvvetlerin dengesi incelenir. Bunun içinde bağımsız iki denge denklemi gerekir. Çözüme en az bir bilinen ve en fazla iki bilinmeyen kuvvetin etkidiği herhangi bir düğümden başlanır.

Örnek: Şekil deki kafes sistemde çubuk kuvvetlerini düğüm noktaları metoduna göre bulunuz.



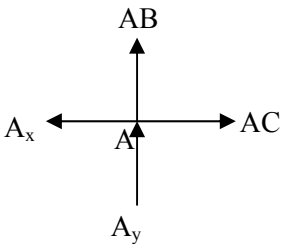
Çözüm:



$$\sum M_A = 0 \; ise$$
$$-1000.30 + C_y.40 = 0$$
$$C_y = 750 \; N$$

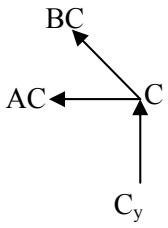
$$\sum F_y = 0 \; ise \qquad \sum F_x = 0 \; ise$$
$$A_y + C_y = 0 \qquad -A_x + 1000 = 0$$
$$A_y = -750 \; N \qquad A_x = 1000 \; N$$

A Düğümü



$$\sum F_y = 0 \; ise \qquad \sum F_x = 0 \; ise$$
$$AB + (-750) = 0 \qquad AC - A_x = 0$$
$$AB = 750 \; N \qquad AC = 1000 \; N$$

C Düğümü



$$\sum F_y = 0 \; ise$$
$$BC.\frac{3}{5} + C_y = 0$$
$$BC = -1250 \; N$$

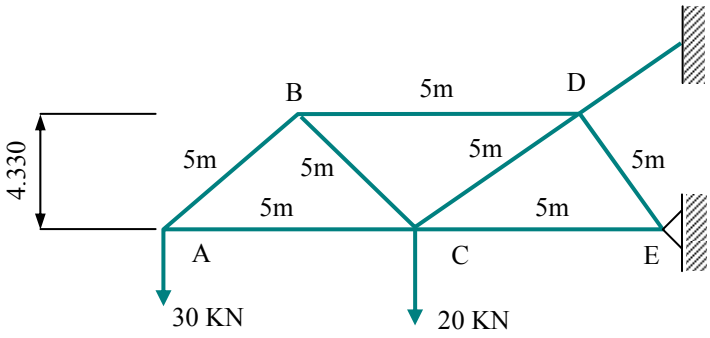
8.6.2 RİTTER METODU (KESİM METODU)

Düğüm metodu ve grafik metodun da, sadece üç denge denkleminden ikisinin avantajından istifa edilmiştir. Zira düğüm noktasında kesişen kuvvetler söz konusudur. Üçüncü denge denkleminin avantajını kullanmak için, kesilmiş bir kafesin bütünü serbest cisim olarak alınabilir. Bu durumda bir noktada kesişmeyen kuvvetlerin dengesi söz konusudur. Üçüncü denge denkleminin avantajı, hesabı istenen çubuğu içine alan bir kesim yaparak sistemi çözüp doğrudan doğruya istenen çubuğun hesabının yapılabilmesidir. Bu durumda hesabı istenen çubuğa gelmek için düğümden düğüme hesap yapmak gereksizdi. Bu durumda sadece üç tane bağımsız denge denklemi vardır. O halde sistemi keserken üç çubuktan fazla çubuk kesilmemelidir.

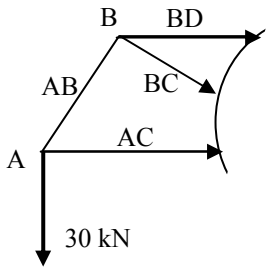
Kesme metodunda anlaşılması gereken esas nokta kesmeden sonra elde edilen bölümün tek bir cisim gibi dengesinin inceleneceğidir. İç kısımdaki çubuklara ait çubuk kuvvetleri çözümde kullanılamaz. Serbest cisim ve dış kuvvetleri açık olarak belirtmek için, kesme işlemi düğümden değil de, çubuklardan yapılmalıdır.

Kesme metodunda, moment denklemlerinin avantajından istifade edilir ve moment merkezi seçilirken, mümkün olduğu kadar fazla bilinmeyen kuvvetin bu noktadan geçmesine dikkat edilmelidir.

Örnek: Konsol şeklinde yüklü kafes sisteminin AC ve BD çubuklarındaki kuvvetleri kesim metodunu kullanarak bulunuz?



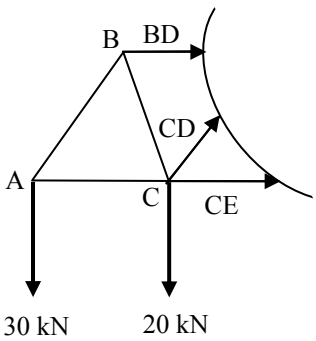
Çözüm:



$$+\sum M_B = 0$$

$$30 \times 2{,}5 + AC \times 4.33 = 0$$

AC = -17,32 kN Bası.



$$+\sum M_C = 0$$

$$30 \times 5 - BD \times 4{,}33 = 0$$

BD = 34,64 kN Çeki.

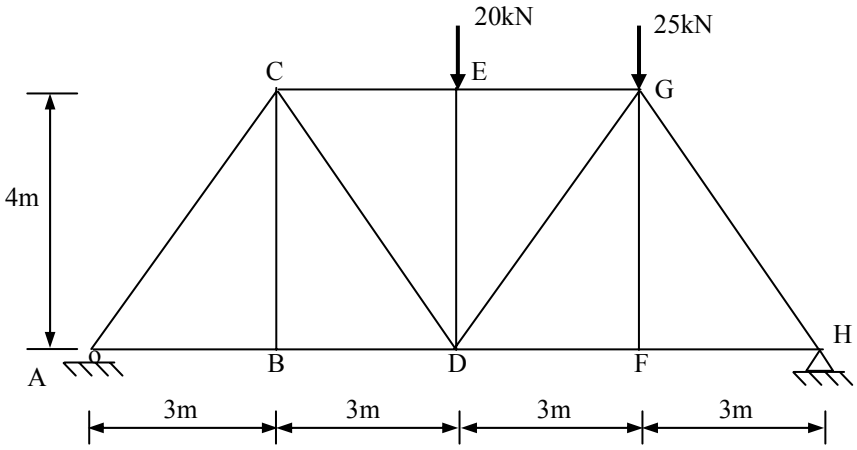
8.6.3 CREMONA METODU (GRAFİK ÇÖZÜM)

Kafes sistemlerde herhangi bir düğüm noktasının dengede bulunması için bu noktadaki çubuk kuvvetleri ile varsa dış kuvvetlerin bileşkesinin sıfır olması gerekir. Bir başka deyimle, geometrik olarak bu kuvvetlere ait kuvvetler poligonu kapalı olmalıdır. Böylece herhangi bir düğüm noktasına ait kuvvetler poligonu kapalı olmalıdır. Böylece herhangi bir düğüm noktasına ait kuvvetler poligonu kapanacak şekilde çizilecek olursa, bu düğüm noktasında birleşen çubuklardan bilinmeyen ikisinin kuvvetleri bulunur. Burada bazı kaidelere uymak gerekir.

Öncelikle mesnet reaksiyonları dahil bütün dış kuvvetlere ait kuvvet poligonunun kapanması gerekir. Poligonda kuvvetler gelişi güzel sıralanmayıp belli bir dönme yönü alınır. Bu yönde sistem üzerinde kuvvetlere rastlanış sırası poligondaki çiziliş sırasıdır. Çizilme önce, bilinmeyen sayısı en fazla iki olan bir düğümden başlanmalıdır. Ayrıca her izostatik kafes sisteminde Cremona planının çizilmesi mümkün değildir.

8.7 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1) Kafes sistemdeki her bir çubuktaki çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.



Çözüm: $\Sigma M_H = 0$

20.6+25.3-Ay.12=0

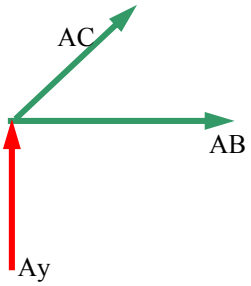
Ay=16,25 kN ↑

$+\uparrow \Sigma Fy = 0$ 16,25-20-25+H_y=0

H_y=28,75 kN ↑

x yönünde etkiyen herhangi bir kuvvet yoktur.

A düğümü



$+\uparrow \Sigma Fy = 0$ ise A_y+AC.Sin 53=0

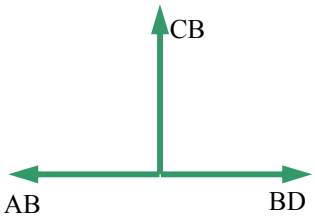
AC=-20,34 kN Bası

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma Fx = 0$ ise AC.Cos53+AB=0

-20,34. Cos53+AB=0

AB=12,24 kN Çeki

B düğümü

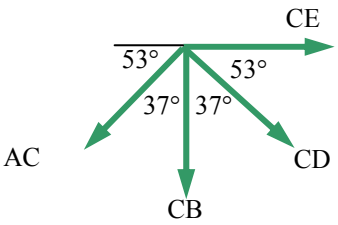


$\Sigma Fx = 0$

-AB+BD=0 $\Rightarrow$ **AB=BD= 12,24 kN Çeki**

$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow$ **CB=0**

C düğümü



$+\uparrow \Sigma F_y = 0$ -AC.Sin53-CD.Sin53-CB=0

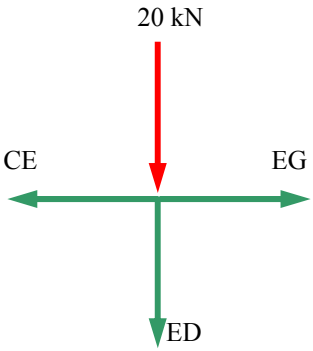
CD= –AC $\Rightarrow$ **CD=20,34 kN Çeki**

$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$ -AC.Cos53+CD.Cos53+CE=0

CE=AC.Cos53-CD.Cos53

CE=-24,48 kN Bası

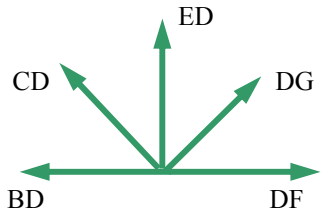
E düğümü için



$\Sigma F_x = 0$ ise -CE+EG=0 **EG=-24,48 kN Bası**

$\Sigma F_y = 0$ -20-ED=0 **ED=-20 kN Bası**

D düğümü için



$\Sigma F_x = 0$

ED+CD.Sin53+DG.Sin53=0

DG=(20-20,34.Sin53)/Sin53

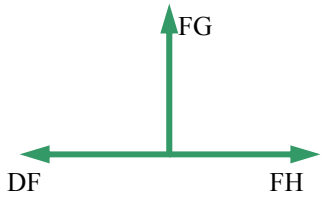
DG=4,7 kN Çeki

-BD-CD.Cos53+DG.Cos53+DF=0

-12,24-20,34.Cos53+4,7.Cos53+DF=0

DF=21,65 kN Çeki

F düğümü için

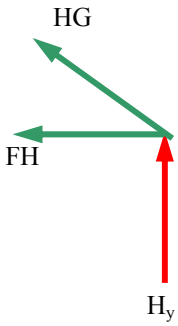


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$ **FG=0**

$\Sigma F_x = 0$

-DF+FH=0$\Rightarrow$ **FH=21,65 kN Çeki**

H düğümü için

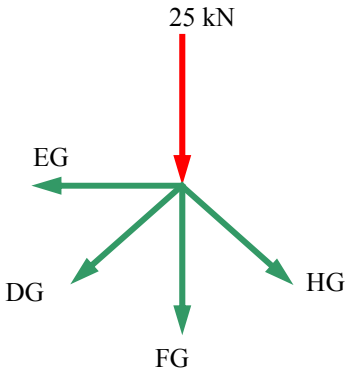


$\Sigma F_y = 0$ 28,75+HG.Sin53=0$\Rightarrow$ **HG=-36 kN Bası**

$\sum F_x = 0$ -HG.Cos53-FH=0

FH=21,66 kN Çeki

G Düğümü için



$\Sigma F_x = 0$

-EG-DG.Cos53+HG.Cos53=0

-EG-4,7.Cos53-36.Cos53=0

EG=-24,5 kN Bası

$\Sigma F_y = 0$

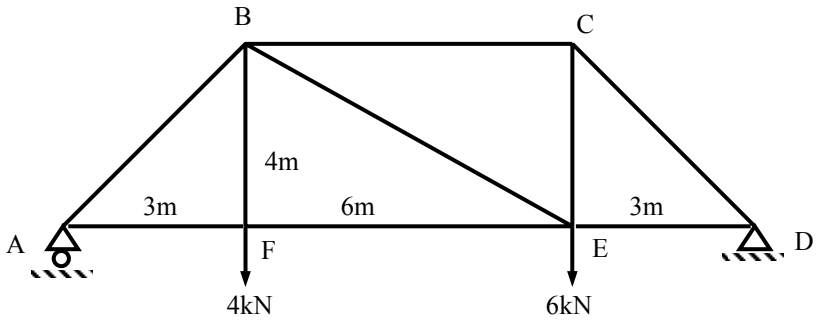
-25-DG.Sin53-FG-HG.Sin53=0

-25-4,7.Sin53-HG.Sin53=0

HG=-36 kN Bası

Problem 2)

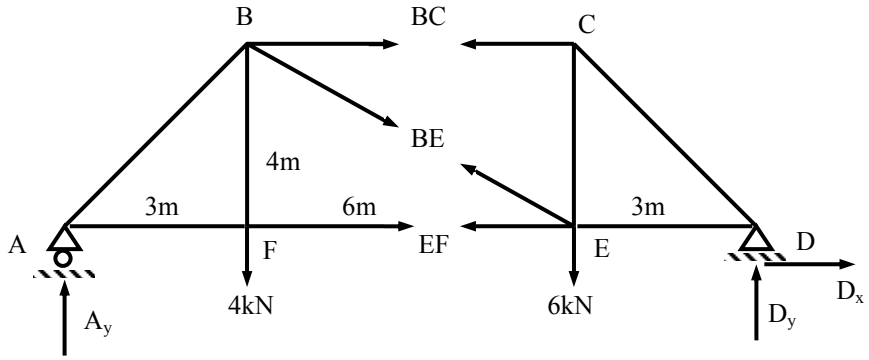
Kafes sisteminin BC, BE ve EF çubuk kuvvetlerini belirleyiniz.



<u>Çözüm:</u>

Kesim metodunun uygulanması

a) Statikçe belirli olup olmadığı kontrol edilir.
b) Reaksiyon kuvvetleri bulunur.
c) En fazla üç çubuğu kapsayacak kesim yapılır.
d) Kesilen parçalardan biri seçilir. Çubuk kuvveti çekme şeklinde yerleştirilir.
e) Denge denklemleri uygulanarak bilinmeyen çubuk kuvvetleri hesaplanır.

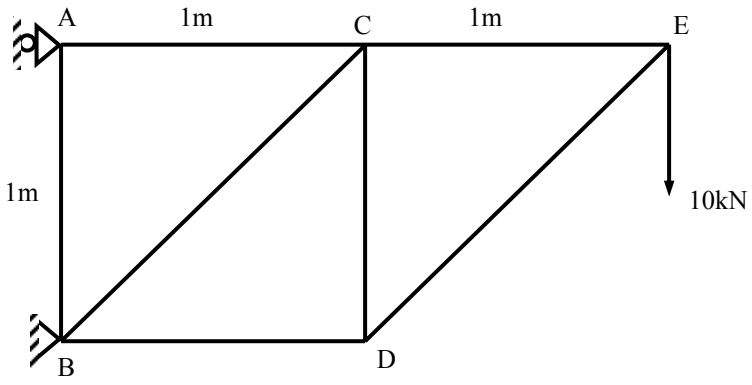


$$\sum M_D = 0$$
$$A_y.12 - 4.9 - 6.3 = 0$$
$$A_y = 4{,}5kN$$
$$\sum F_y = 0 \quad D_y = 5{,}5kN$$
$$\sum M_B = 0$$
$$A_y.3 - EF.4 = 0$$
$$EF = 3{,}38kN$$

$$\sum F_y = 0$$
$$-BE.\frac{4}{7{,}211} - A_y - 4 = 0$$
$$BE = 0{,}9kN$$
$$\sum F_x = 0$$
$$BC + BE.\frac{6}{7{,}211} + EF = 0$$
$$BC = -4{,}1kN$$

Problem 3)

Kafes sisteminin çubuk kuvvetlerini belirleyiniz.



<u>Çözüm:</u>

$\sum M_B = 0$

$-A_x - 10.2 = 0$

$A_x = -20\,kN \rightarrow$

$B_x = 20\,kN$

$B_y = 10\,kN$

E düğümü

$\sum F_x = 0$

$-CE - ED\cos 45 = 0$

$CE = -ED\cos 45$

$\sum F_y = 0$

$-10 - DE\sin 45 = 0$

$DE = -14{,}14kN$

$CE = -10kN$

D düğümü

$BD = 14{,}14\cos 45$

$BD = 9{,}99kN$

$DC = 9{,}99kN$

A dügümü

$A_x + AC = 0$

$AC = 20\,kN$

$AB = 0$

B dügümü

$\sum F_x = 0$

$B_x + BD + BC.Cos\,45 = 0$

$20 + BD + BC.Cos\,45 = 0$

$\sum F_y = 0$

$BA + B_y + BC.Cos\,45 = 0$ *ise* $BC = -14{,}14\ kN$ *ve* $BD = -10\,kN$

C dügümü

$\sum F_y = 0$

$-CD - CB.Cos\,45 = 0$ *ise* $CD = 10\ kN$

$\sum F_x = 0$

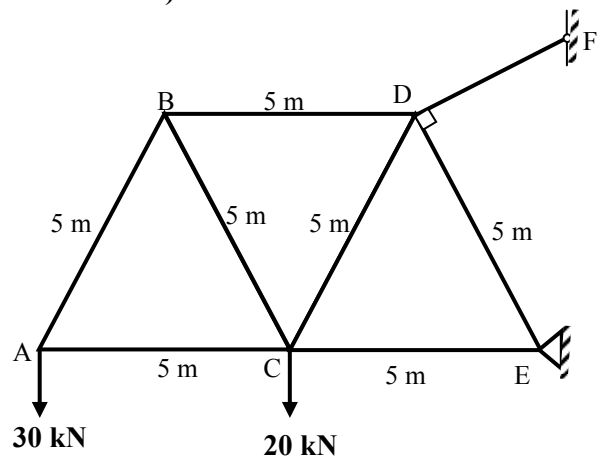
$-CA - CB.Cos\,45 + CE = 0$ *ise* $CE = 10\,kN$

D dügümü

$\sum F_x = 0$

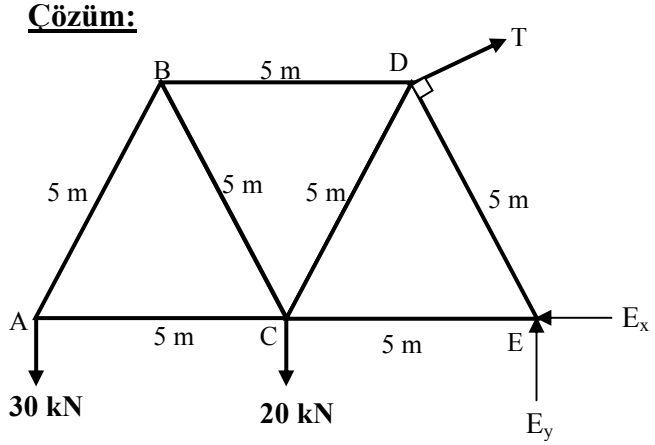
$-DB + DE.Cos\,45 = 0$ *ise* $DE = -14{,}14\,kN$

Problem 4)

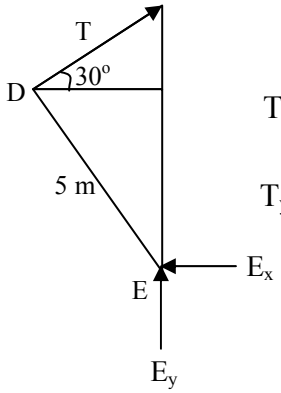


Verilen kafes sistemde BC ve BD çubuklarındaki çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.

Çözüm:



$\sum M_E = 0$ -T.5+20.5+30.10=0 ise **T=80 kN**



T_x=T.Cos30=69,3 kN

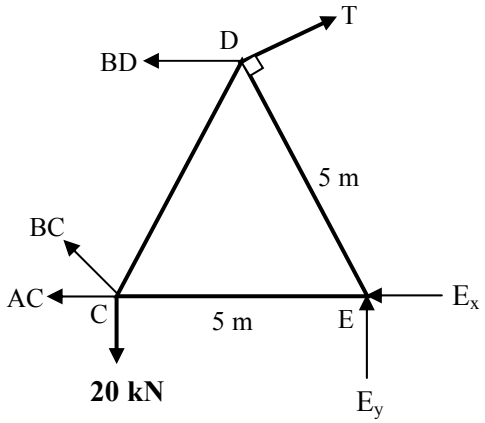
T_y=T.Sin30=40 kN

$\sum F_x = 0$

$-E_x + T_x = 0 \Rightarrow E_x = 69{,}3\ kN$

$\sum F_y = 0$

$E_y + T_y - 30 - 20 = 0 \Rightarrow E_y = 10\ kN$



$\sum M_C = 0$ ise

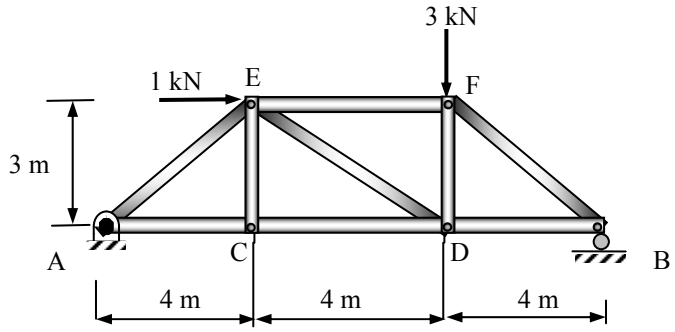
$(BD.Sin60).5+T_y.2,5- T_x.4,33+ E_y.5=0$

BD=34,65 kN Çeki

$$\sum F_y = 0$$
$$-20 + E_y + T_y + BC.Sin60 = 0$$
$$-20 + 10 + 40 + BC.Sin60 = 0$$

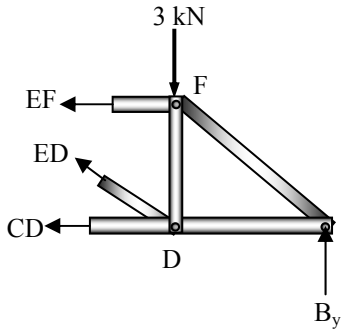
BC=-34,64 kN Bası

Problem 5)



Verilen basit kafes sistemde EF,ED ve CD çubuklarında çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.

Çözüm:



$\sum M_A = 0$

-1.3–3.8+B_Y.12 = 0

B_Y = 2,25 kN

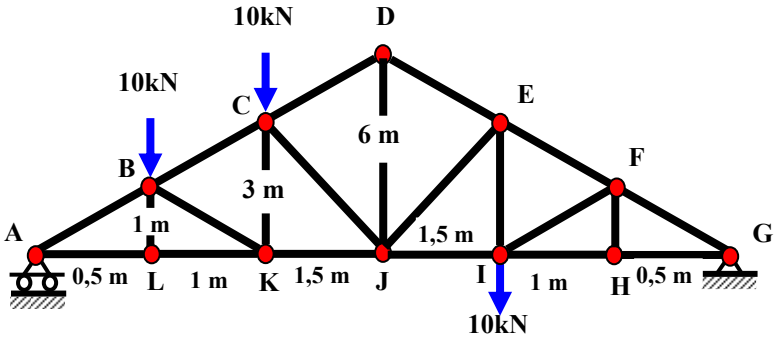
$\sum M_D = 0$ ise -EF.3-B_y.4=0 ise **EF= -3 kN Bası**

$\sum F_y = 0$ ise –3+ED.0,6+B_y =0 ise **ED=1,25 kN Çeki**

$\sum F_x = 0$ ise –EF-CD-ED.0,8 =0 ise **CD=2 kN Çeki**

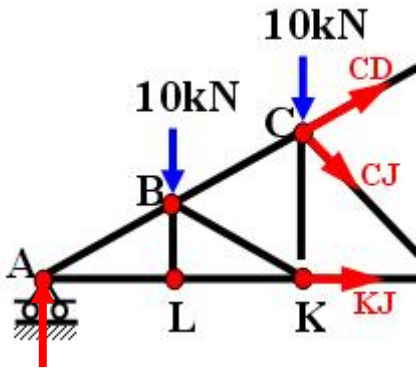
EK PROBLEMLER-KAFES SİSTEMLER

Problem 1)



Şekilde kafes sistemde CD, CJ ve KJ çubuklarındaki çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.

Çözüm:



$\sum M_G = 0$

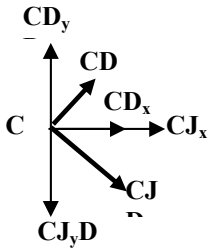
$10.5{,}5+10.4{,}5+10.1{,}5-A_y.6 = 0$

$A_y = 19{,}16$ kN

$\sum M_C = 0$

$-19{,}16.1{,}5+10.1+KJ.3 = 0$

$KJ = 6{,}24$ kN



$$CD_x = CD.\frac{1{,}5}{3{,}35} = 0{,}44CD,\ CD_y = CD.\frac{3}{3{,}35} = 0{,}89CD$$

$$CJ_x = CJ.\frac{1{,}5}{3{,}35} = 0{,}44CJ\ ,\ CJ_y = CJ.\frac{3}{3{,}35} = 0{,}89CJ$$

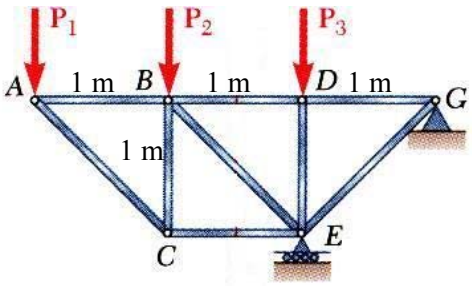
$\sum F_x = 0$ ise $6{,}24+ CD_x+ CJ_x=0$ ise $CD+CJ= -13{,}93$ kN

$\sum F_y = 0$ ise $19{,}16-10-10+ CD_x+ CJ_x=0$ ise $CD-CJ= 0{,}94$ kN

Buna göre;

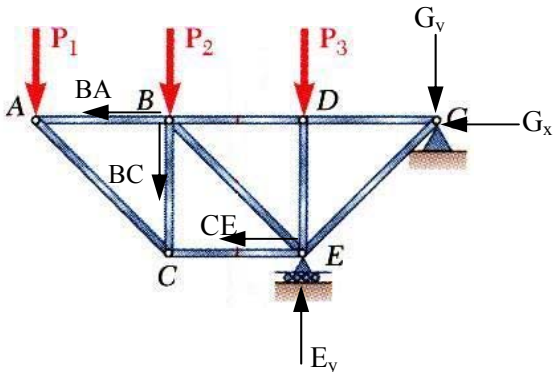
CD= -6,5 kN ve CJ= -7,43 kN

Problem 2)



Şekilde kafes sistemde BC ve CE çubuklarındaki çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.
(P_1=1 kN, P_2=2 kN, P_3=3 kN)

Çözüm:



$\sum M_G = 0$

$1.3+2.2+3.1-E_y.1 = 0$

$E_y = 10$ kN

$\sum F_x = 0$ ise $G_x = 0$

$\sum F_y = 0$ ise $E_y - 1 - 2 - 3 - G_y = 0$

$G_y = 4$ kN

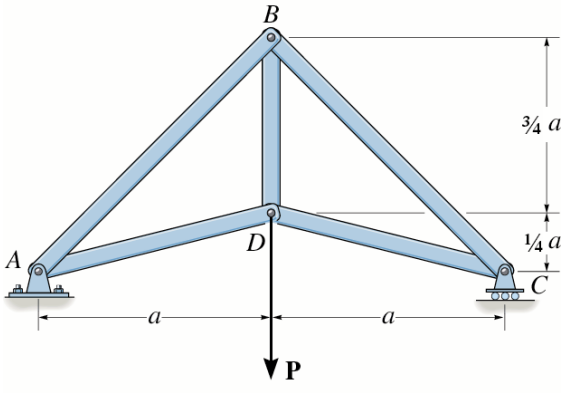
$\sum M_G = 0$ ise $BC.2+2.2+3.1-CE.1-E_y.1=0$ ise $2BC-CE=3$ kN

$\sum F_x = 0$ ise $-BA-CE=0$ ise $BA=1$ kN

$\sum F_y = 0$ ise $E_y - BC - 2 - 3 - G_y = 0$ ise $10-BC-5-4=0$ ise $BC=1$ kN

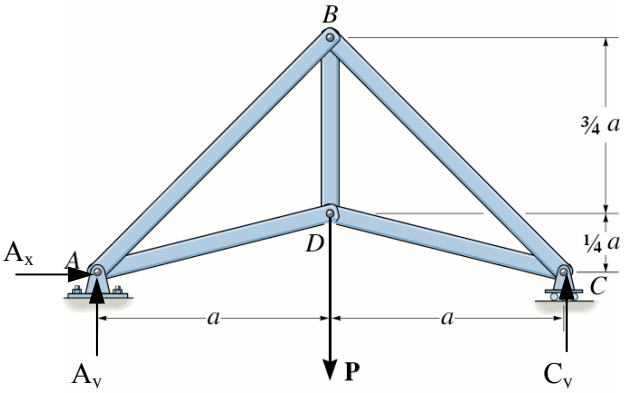
Buna göre; $CE = -1$ kN

Problem 3)



Her bir elemandaki çubuk kuvvetini P cinsinden bulunuz.

Çözüm:



$\sum M_A = 0$

$C_y.2a - P.a = 0$

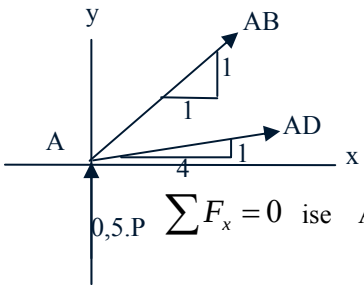
$C_y = 0,5.P$

$\sum F_x = 0$ ise $A_x = 0$

$\sum F_y = 0$ ise $A_y + C_y - P = 0$

$A_y = 0,5.P$

A düğümü:



$AB_x = AB.\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7.AB$ $\quad AD_x = AD.\frac{4}{\sqrt{17}} = 0,97.AD$

$AB_y = AB.\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7.AB$ $\quad AD_y = AD.\frac{1}{\sqrt{17}} = 0,24.AD$

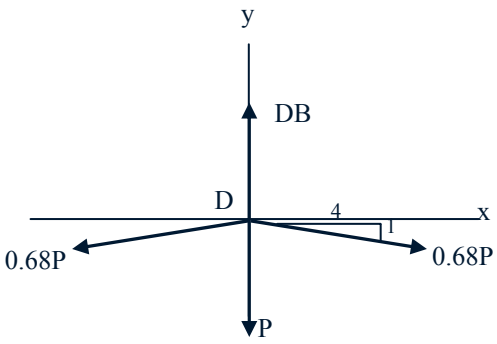
$\sum F_x = 0$ ise $AD_x + AB_x = 0$ ise $0,97.AD + 0,7.AB = 0$

$\sum F_y = 0$ ise $0,5.P + AD_y + AB_y = 0$

$0,5.P + 0,7.AB + 0,24.AD = 0$

Buna göre; AD=DC=0,68.P ve AB=BC= -0,94.P

D düğümü:



$\sum F_y = 0$ ise $DB - AD_y + DC_y - P = 0$

$DB - 0,24.0,68.P - 0,24.0,68.P - P = 0$

$DB = 1,32.P$

BÖLÜM 9

ÇERÇEVE VE MAKİNALAR

9.1 Giriş ve Tanımlar

Kafes sistemi;

- Sürtünmesiz mafsallarla bağlanmışlardır.
- Doğru eksenli çubuklardan meydana gelmiştir.
- Kuvvet çubuk ekseni doğrultusunda etki eder.

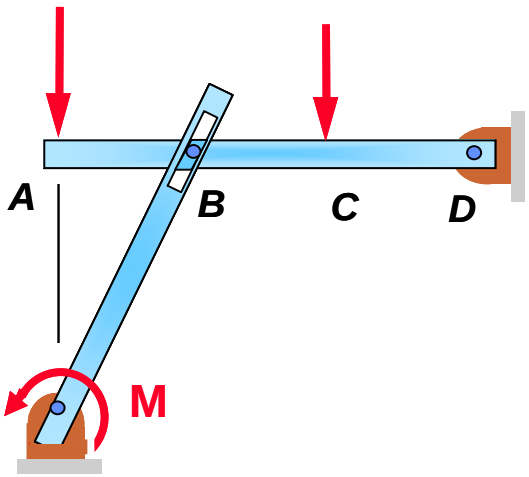
Çerçeveler;

- Çubuklara 3 veya daha fazla kuvvet etki eder.
- Kuvvetler çubuk ekseni doğrultusunda olmak zorunda değildir.

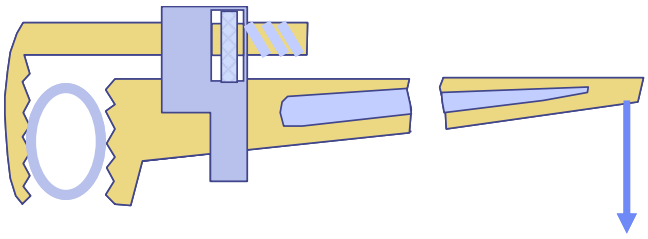
Makinalar;

- Kuvvet iletir veya kuvveti değiştirerek aktarırlar.
- Hareketli veya hareketsiz olabilirler.
- Her zaman hareketli parçalardan oluşurlar.

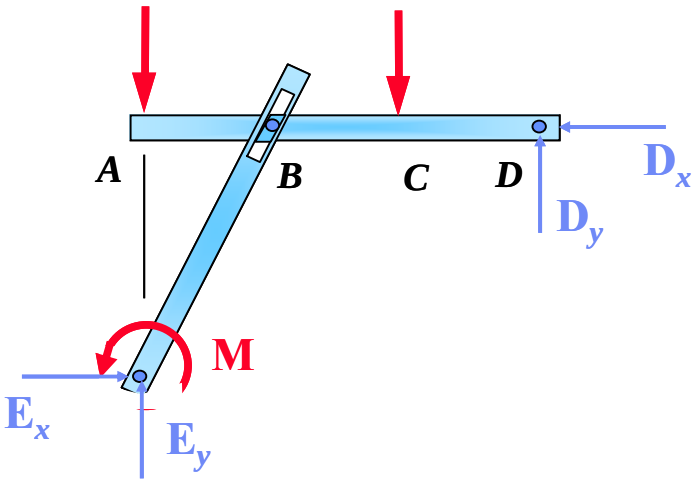
Çerçeveler ve Makinalar çoklu kuvvet elemanı içeren yapılardır. Elemanlar üzerine üç veya daha fazla kuvvet etki eder. Çerçeveler yükleri taşımak için dizayn edilmişlerdir ve genellikle hareketsiz, tamamen tutulu yapılardır.



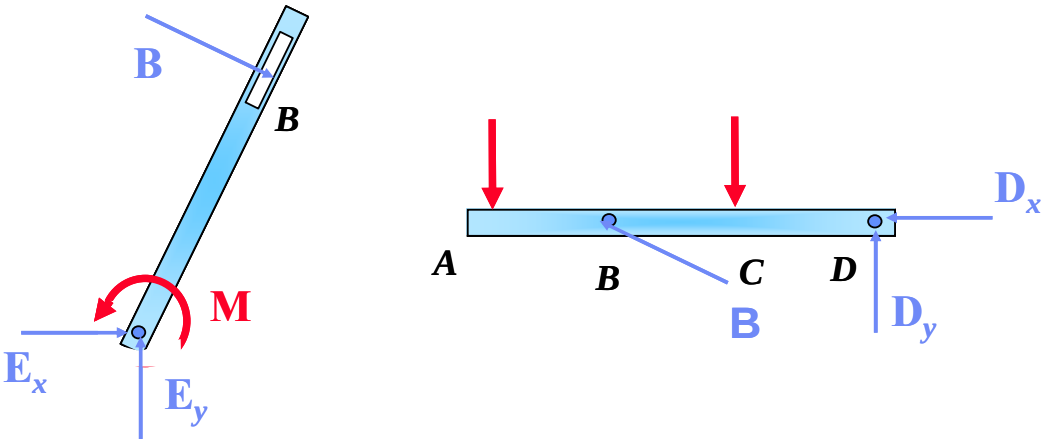
Makinalar kuvvetleri iletmek veya kuvveti değiştirerek aktarmak üzere dizayn edilmişlerdir ve her zaman hareketli parçalardan oluşurlar.



Bir çerçevenin analizi için ilk olarak, serbest bir cisim olarak çerçevenin tümü düşünülür ve üç denge denklemi yazılır. Eğer çerçeve rijit ise destek yerlerinden ayrıldığında reaksiyonlar sadece üç bilinmeyendir ve bunlar bu denklemler yardımıyla elde edilebilir.



Diğer taraftan, eğer rijit çerçeve kesilecek olursa, destek yerlerinden ayrıldığında reaksiyon kuvvetleri üç bilinmeyenden fazla olabilir ve denge denklemlerinden hepsi bulunamayabilir.



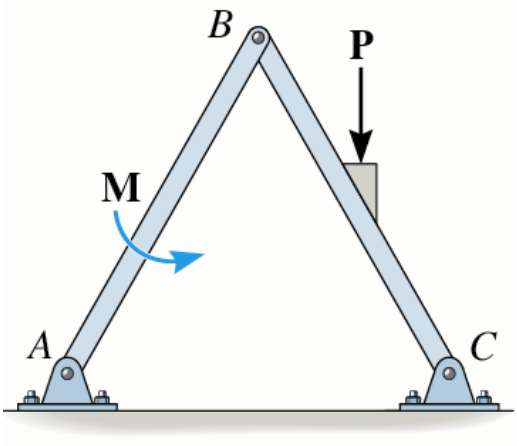
Çerçeve elemanlara ayrılır ve her eleman kuvvet çifti elemanı olarak veya çoklu kuvvet elemanı olarak tanımlanır. Mafsallar ise birbirine bağlanmış her bir elemanın bağlandıkları parçanın adıdır.

Çoklu kuvvet elemanlarının her birinin serbest cisim diyagramı çizilir. İki çoklu kuvvet elemanı aynı kuvvet çifti elemanına bağlandığında doğrultusu belli olan fakat büyüklüğü belli olmayan eşit ve zıt yönlü kuvvetler ile eleman üzerine etkirler. İki çoklu kuvvet elemanı bir mafsal ile bağlıysa, birbirlerini belli olmayan doğrultuda eşit ve zıt yöndeki kuvvetler ile zorlarlar ki bunlar iki bilinmeyen bileşen ile tanımlanmalıdır.

Çoklu kuvvet elemanlarının serbest cisim diyagramlarından elde edilen denge denklemleri ile çeşitli iç kuvvetler çözülebilir. Denge denklemleri aynı zamanda mesnet reaksiyonlarının belirlenmesinde de kullanılır. Aslında çerçeve statikçe belirli ve rijit ise, çoklu kuvvet elemanlarının serbest cisim diyagramları, bilinmeyen kuvvetlerin bulunduğu birçok denklemler olarak elde edilir.

Yukarıdaki tavsiyelerin yanında tavsiye edilen ilk olarak çerçevenin tamamıyla serbest cisim diyagramını göz önüne alıp en az sayıda eşzamanlı olarak çözüm yapılmasıdır.

Çerçeve ve makineler, sık sık çoklu kuvvet elemanlarının mafsal ile bağlanmasından oluşturulur. Elemanlar iki veya daha fazla kuvvete maruz kalmaktadırlar.



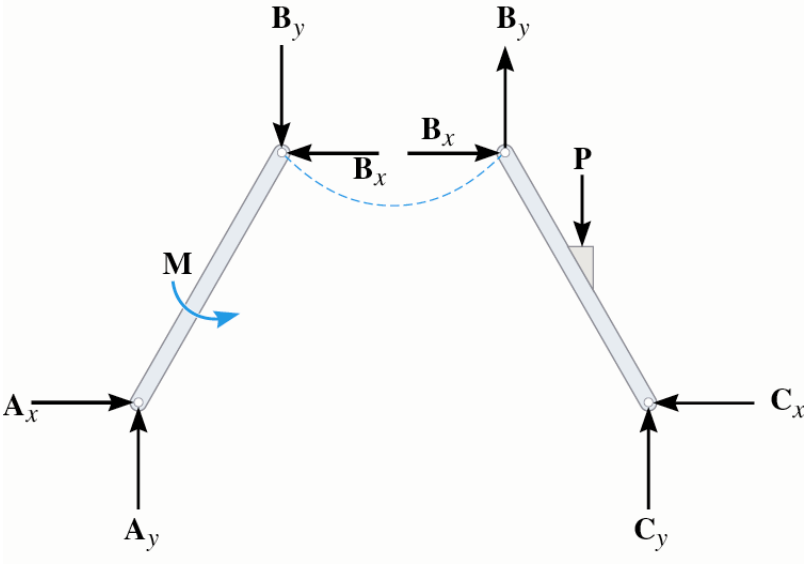
AB ve BC çoklu kuvvet elemanlarıdır

AB elemanı 3 kuvvete maruzdur:

- Meydana gelen kuvvetlerden biri B mafsalında
- Meydana gelen kuvvetlerden biri A mafsalında
- Kuvvet çifti (Moment) ise M
-

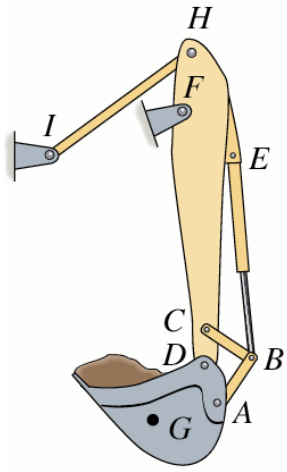
Benzer olarak BC elemanı da 3 kuvvete maruzdur:

- Meydana gelen kuvvetlerden biri B mafsalında
- Meydana gelen kuvvetlerden biri C mafsalında
- Dış kuvvet P



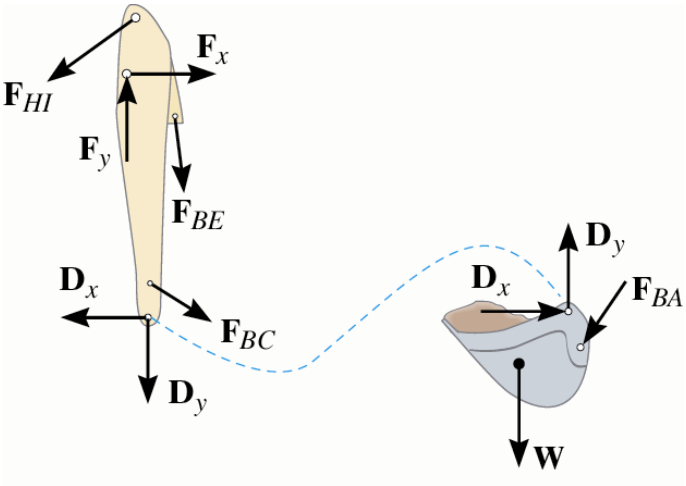


⇒



İki kuvvet elemanı:
•AB
•BC
•BE
.HI

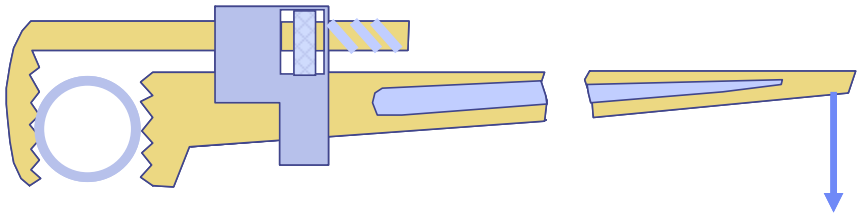
DH elemanı bir çoklu kuvvet elemanıdır.



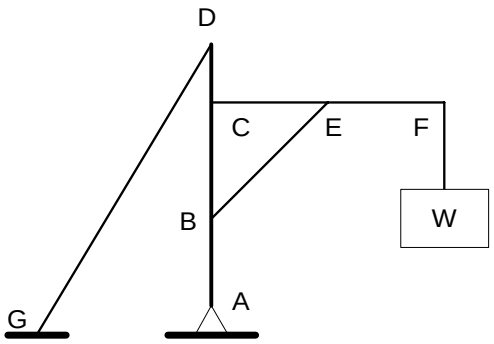
DH elemanı 5 kuvvete maruzdur:

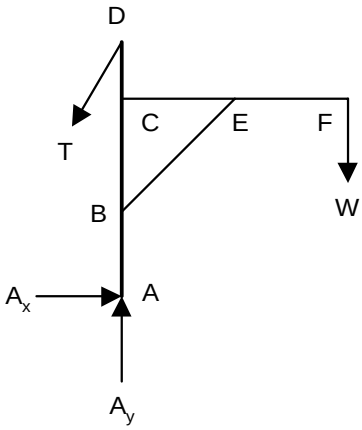
- Meydana gelen kuvvetlerden biri D mafsalında
- Meydana gelen kuvvetlerden biri F mafsalında
- FBE
- FHI
- FBC

Bir makinenin analizinde ise, makine önce elemanlarına ayrılır. Yukarıda anlatılan aynı yöntemler izlenir. Çoklu kuvvet elemanlarının her birinin serbest cisim diyagramları çizilir. Uygun denge denklemleri iç kuvvetler ve dış kuvvetler eşitliği olarak oluşturularak çözüm yapılır.

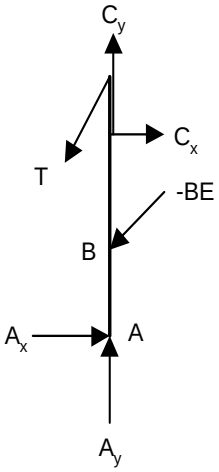


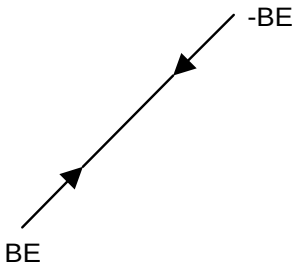
* Bir vinç'in analizi aşağıdaki gibi yapılır.

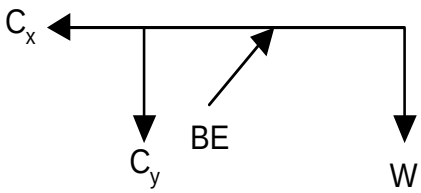




$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow T$$
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y$$

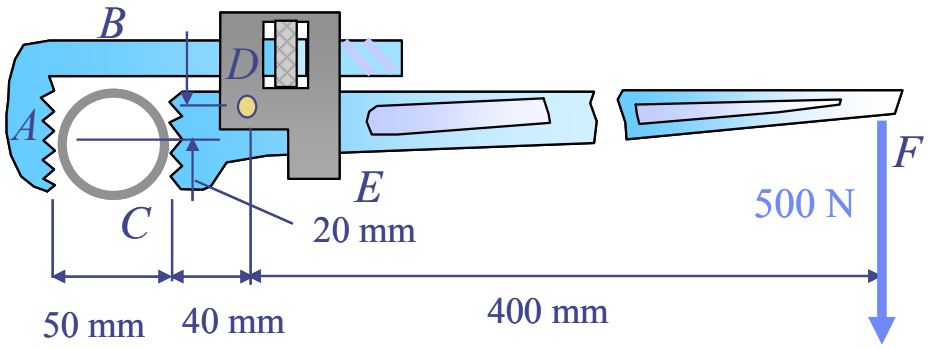






$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow BE$$
$$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow C_y$$
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x$$

Örnek 9.1

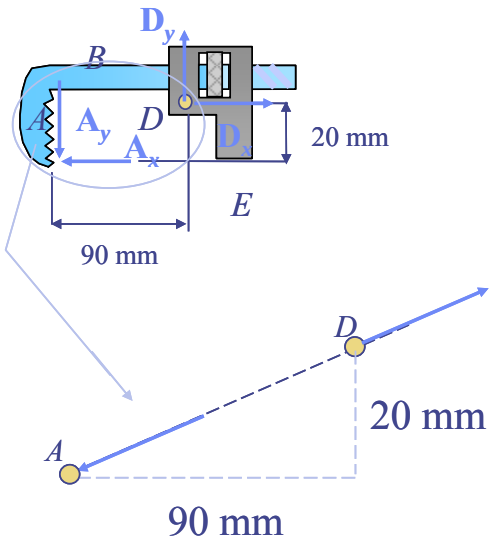


Çapı 50 mm olan bir boru, boru anahtarı ile şekilde gösterildiği gibi sıkılmıştır. AB ve DE elemanları rijit olup, CF parçası ise D noktasındaki bir mafsal ile bu elemanlara bağlanmıştır. Borunun sıkılarak çevrilmesi durumunda (boru ve sıkma elemanları arasında herhangi bir kaymanın olmadığını kabul ederek) boruya A ve C noktalarından etkiyen kuvvet bileşenlerini bulunuz.

Çözüm:

1) Makine elemanlarına ayrılır ve her bir elemanın serbest cisim diyagramı çizilir.
2) İlk önce her bir eleman üzerine etkiyen kuvvetler yazılır ve bağlantı noktalarında da eşit ve zıt yönlü etkiyen kuvvetler yazılır.
3) Diğer çoklu kuvvet elemanları da göz önüne alınır.
4) Her bir eleman için denge denklemleri yazılır.

ABDE parçası için serbest cisim diyagramı:



$\Sigma M_D=0$

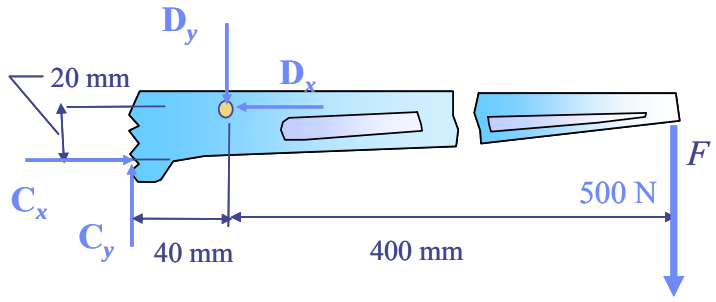
$$\frac{A_y}{20\,mm}=\frac{A_x}{90\,mm}$$

$$A_x = 4{,}5.A_y$$

$$D_y = A_y$$

$$D_x = A_x = 4{,}5.D_y \qquad (1)$$

CF parçası için serbest cisim diyagramı:



$\Sigma M_C = 0$: $D_x(20\text{ mm}) - D_y(40\text{ mm}) - (500\text{ N})(440\text{ mm}) = 0$

(1)'de yerine konulursa;

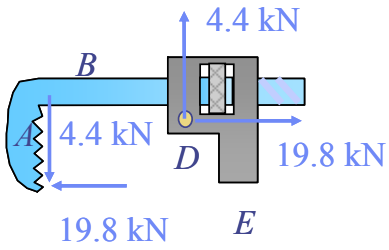
$4.5D_y(20) - D_y(40) - 220.10^3 = 0$

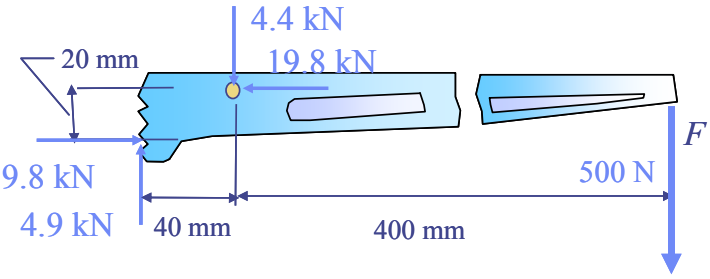
$D_y = 4400\text{ N} = 4.4\text{ kN}$ $\quad D_x = 4.5\,D_y = 19.8\text{ kN}$

$\Sigma F_x = 0$: $C_x - 19.8\text{ kN} = 0$ $\quad C_x = 19.8\text{ kN}$
$\Sigma F_y = 0$: $C_y - 4.4\text{ kN} - 0.5\text{ kN} = 0$ $\quad C_y = 4.9\text{ kN}$

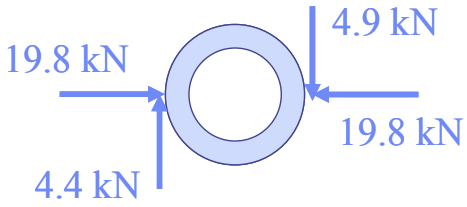
(1). Denklemden;

$A_x = D_x = 19.8\text{ kN}$ $\quad A_y = D_y = 4.4\text{ kN}$





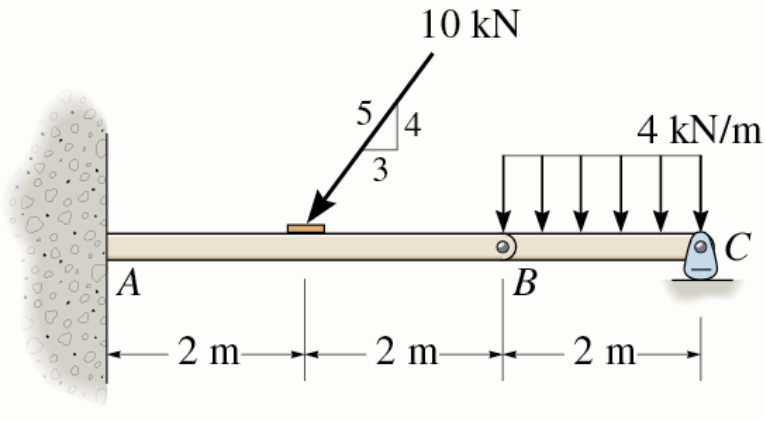
Bütün kuvvet bileşenleri şekilde görüldüğü yönlerde etki etmektedir. Boru üzerindeki bileşenler eşit ve zıt yönlüdür.



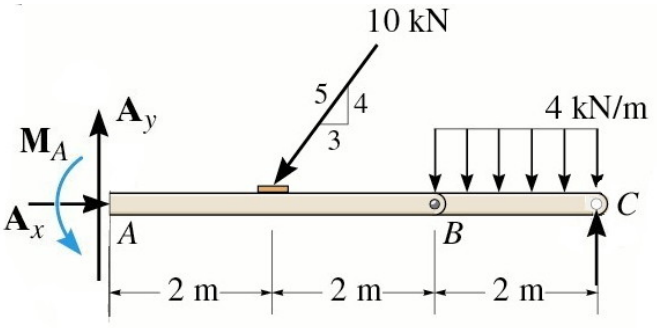
$\mathbf{A}_x = 19.8\text{ kN} \rightarrow$
$\mathbf{A}_y = 4.4\text{ kN} \uparrow$
$\mathbf{C}_x = 19.8\text{ kN} \leftarrow$
$\mathbf{C}_y = 4.9\text{ kN} \downarrow$

Örnek 9.2

Birleşik bir kiriş şekilde gösterildiği üzere B noktasındaki bir mafsal ile bağlanmıştır. Mesnetlerdeki reaksiyonları hesaplayınız. (Kirişin ağırlığını ve kalınlığını ihmal ediniz.)

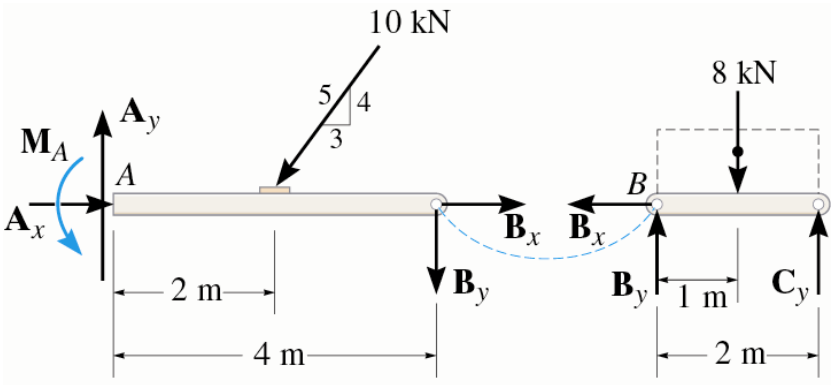


Çözüm :



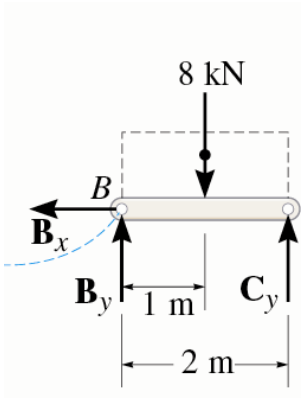
Serbest Cisim Diyagramı:
Tüm kiriş için $\Rightarrow$ 4 bilinmeyen
A'da ankastre $\Rightarrow$ 1. Yatay reaksiyon (A_x)
2. Dikey reaksiyon (A_y)
3. Moment (M_A)
C'deki mesnet $\Rightarrow$ 4. Dikey reaksiyon (C_y)

* 4 bilinmeyen var; A_x, A_y, M_A, ve C_y
* 3 Denge denklemi var:
* $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, ve $\Sigma M = 0$
* Kiriş AB ve BC olmak üzere iki parçaya ayrılır.



* BC kısmındaki denge denklemleri:

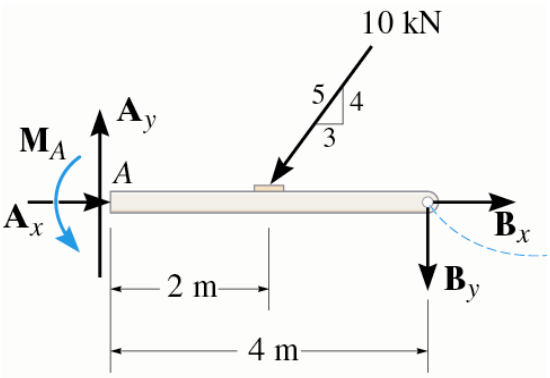
$$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0$$
$$\Rightarrow -B_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$
$$(+M_B = 0$$
$$\Rightarrow -8kN(1m) + C_y(2m) = 0$$
$$\Rightarrow C_y = 4kN$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0$$
$$\Rightarrow B_y - 8kN + C_y = 0$$
$$\Rightarrow B_y - 8kN + 4kN = 0$$
$$\Rightarrow B_y = 4kN$$



* AB kısmındaki denge denklemleri:

$$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow A_x - (10kN)\left(\frac{3}{5}\right) + B_x = 0$$
$$B_x = 0 \quad \Rightarrow A_x = 6kN$$

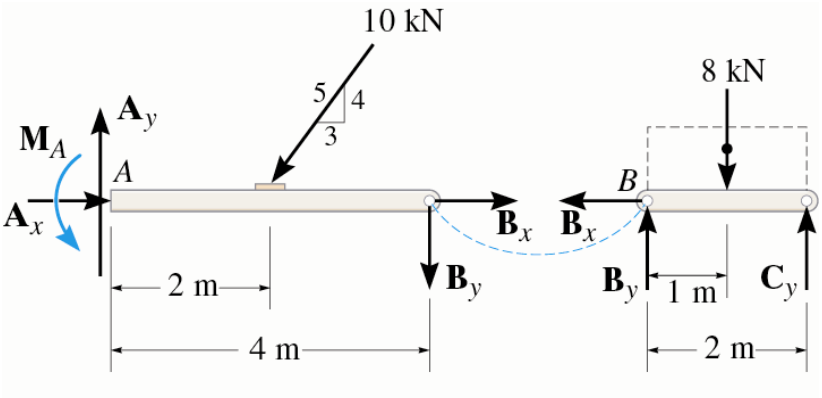
$$(+M_A = 0 \quad \Rightarrow M_A - (10kN)\left(\frac{4}{5}\right)(2m) - B_y(4m) = 0$$
$$B_y = 4kN \quad \Rightarrow M_A = 16 + (4)(4) = 32kN.m$$



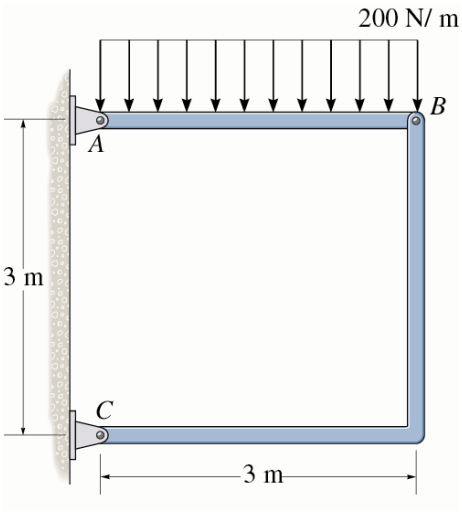
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow A_y - (10kN)\left(\frac{4}{5}\right) - B_y = 0$$
$$B_y = 4kN \quad \Rightarrow A_y = 8 + 4 = 12kN$$

Sonuçlar:

$$A_x = 6kN$$
$$A_y = 12kN$$
$$M_A = 32kN.m$$
$$B_x = 0kN$$
$$B_y = 4kN$$
$$C_y = 4kN$$

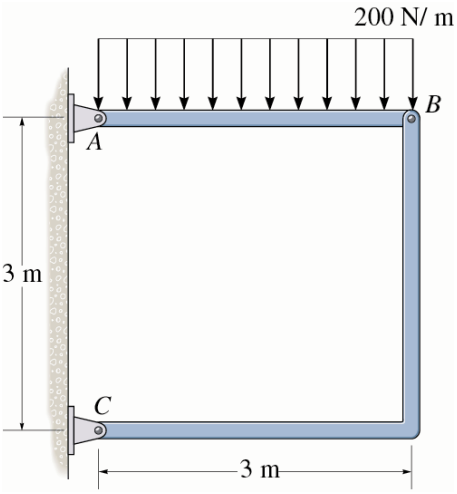


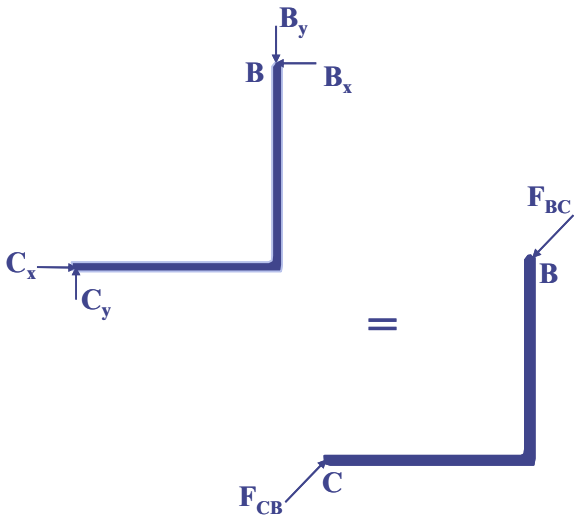
Örnek 9.3



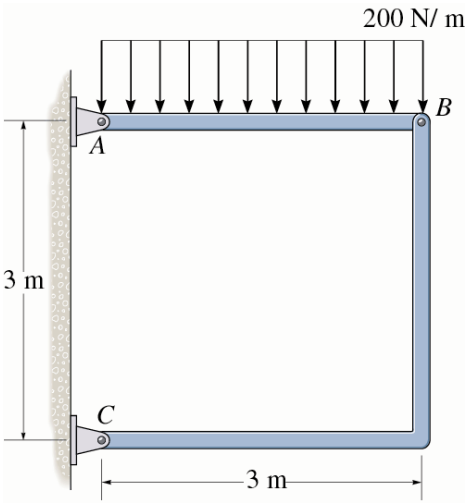
Şekilde görülen iki parçalı çerçevenin A ve C noktalarındaki yatay ve dikey kuvvet bileşenlerini hesaplayınız.

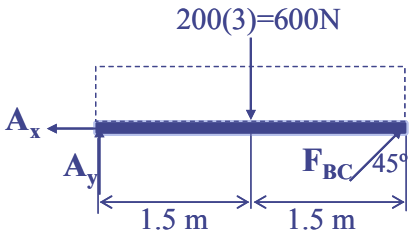
Çözüm :

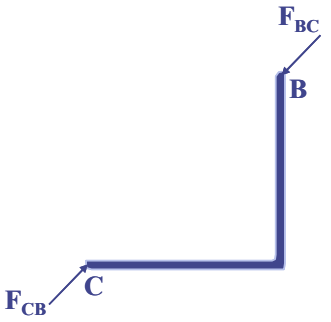




Serbest Cisim Diyagramı:





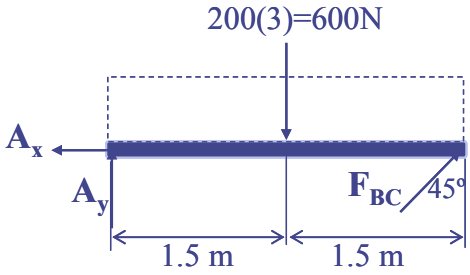


Denge Denklemleri:

$$(+M_A = 0$$
$$\Rightarrow F_{BC}\cos 45°(3) - 600(1.5) = 0$$
$$\Rightarrow F_{BC} = \frac{900}{3\cos 45°} = 424.26N$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0$$
$$\Rightarrow F_{BC}\sin 45° - A_x = 0$$
$$\Rightarrow A_x = (424.26)(\sin 45°) = 300N$$

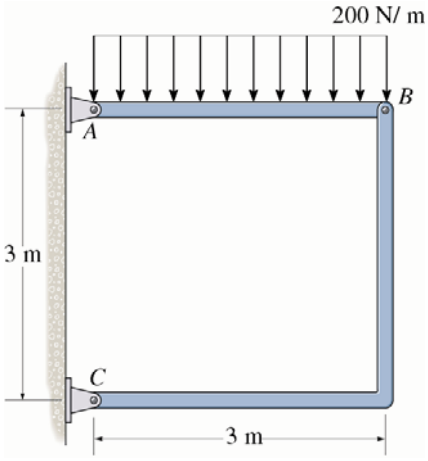
$$+\uparrow \sum F_y = 0$$
$$\Rightarrow A_y + F_{BC}\cos 45° - 600 = 0$$
$$\Rightarrow A_y = 600 - (424.26)(\cos 45°) = 300N$$

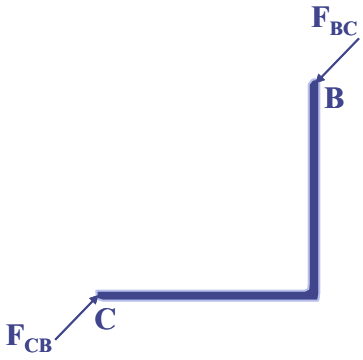


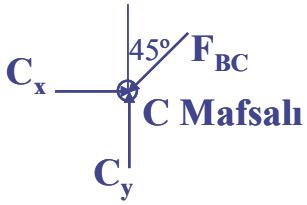
C noktası:

$$C_x = F_{BC}\sin 45°$$
$$\Rightarrow C_x = (424.26)(\sin 45°)$$
$$\Rightarrow C_x = 300N$$

$$C_y = F_{BC}\cos 45°$$
$$\Rightarrow C_y = (424.26)(\cos 45°)$$
$$\Rightarrow C_y = 300N$$







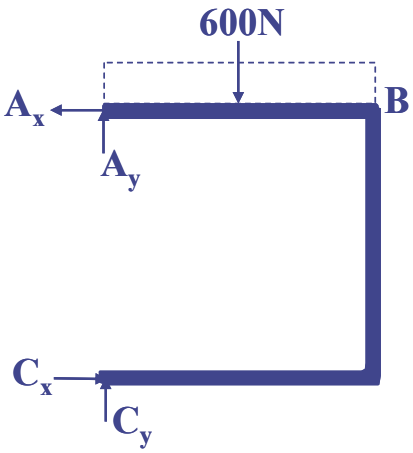
Sağlaması:

$A_x = 300N$ $\quad A_y = 300N$

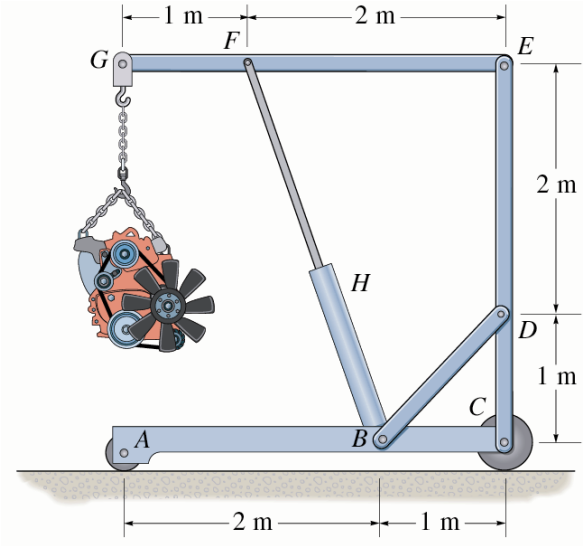
$C_x = 300N$ $\quad C_y = 300N$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0$$
$$\Rightarrow C_x - A_x = 0$$
$$300 - 300 = 0 \Rightarrow saglandı$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$
$$\Rightarrow A_y + C_y - 600 = 0$$
$$300 + 300 - 600 = 0 \Rightarrow saglandı$$

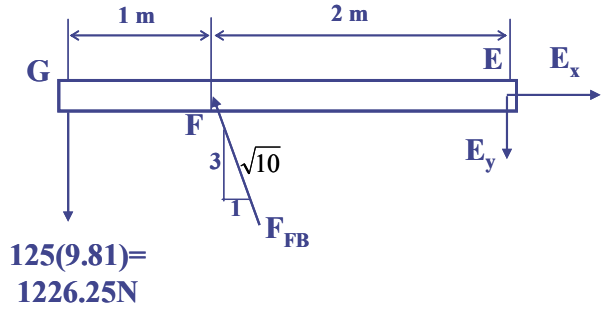


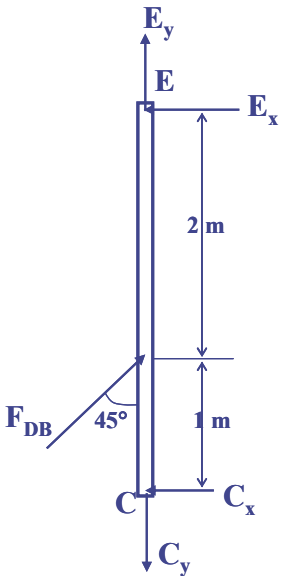
Örnek 9.4



Şekildeki kriko ile 125 kg'lık bir motor kaldırılmaktadır. Krikonun DB ve FB elemanlarında meydana gelen kuvvetleri bulunuz.

Çözüm :





$$\sum M_E = 0$$

$$122625(3) - F_{FB}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)(2) = 0$$

$$\Rightarrow F_{FB} = 193887N = 1.94kN$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

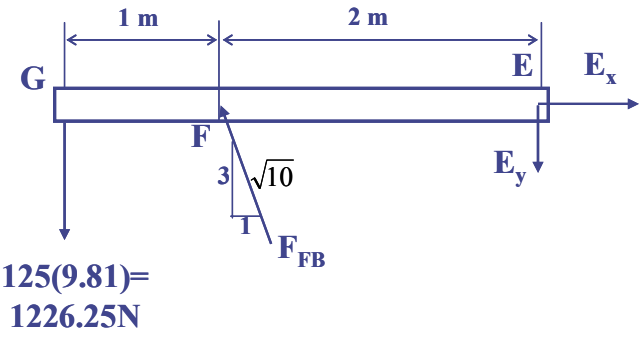
$$193887\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - 122625 - E_y = 0$$

$$\Rightarrow E_y = 613.125N$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0$$

$$E_x - 193887\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0$$

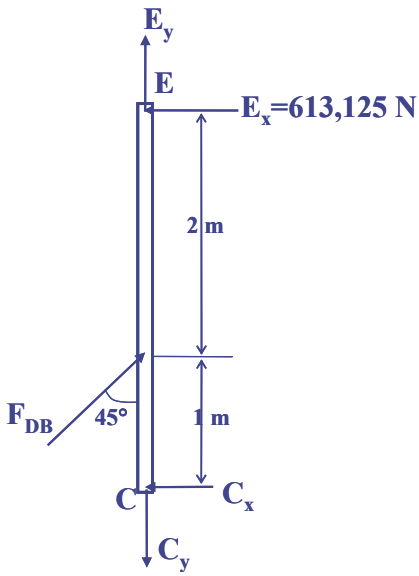
$$\Rightarrow E_x = 613.125N$$



$$\sum M_C = 0$$

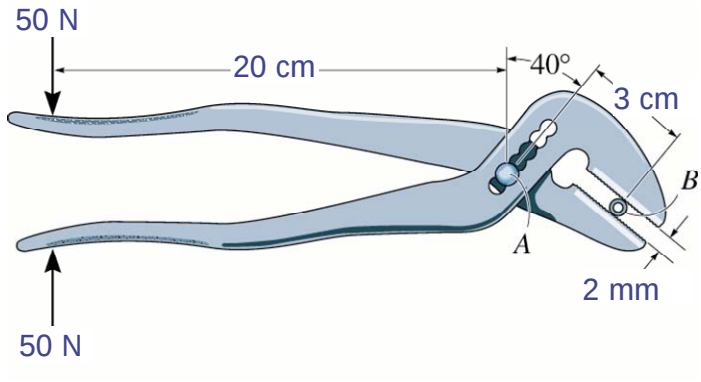
$$613.125(3) - F_{BD}\sin 45°(1) = 0$$

$$\Rightarrow F_{DB} = 2601.27N = 2.60kN$$



Örnek 9.5

Ayarlı bir pense ile B noktasındaki parçanın kesilmesi için 50 N'luk bir yük uygulanmaktadır. Bu durumda parçanın kesilmesi için uygulanmış olan kuvveti hesaplayınız.

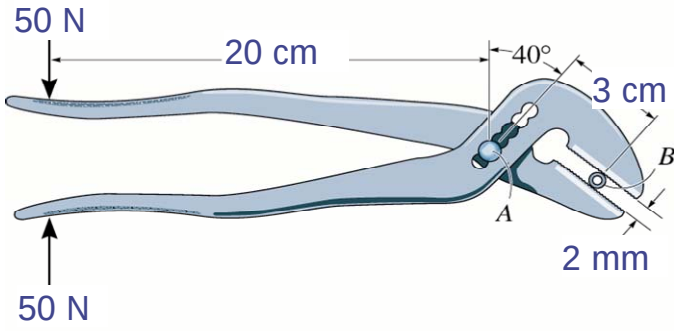


Çözüm :

$$\sum M_A = 0$$

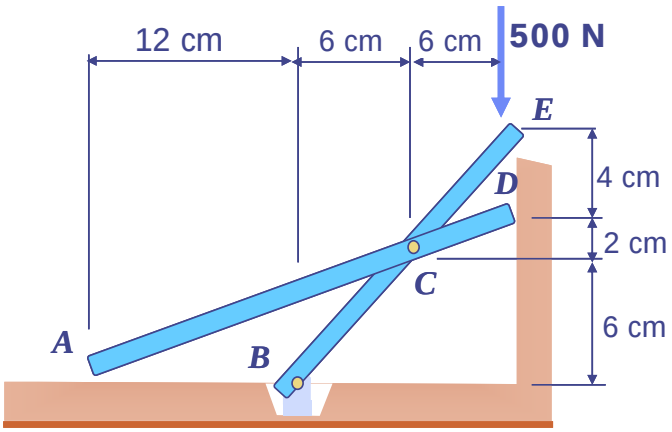
$$50(20) - 3(F_B) = 0$$

$$\Rightarrow F_B = 333{,}3\,N$$





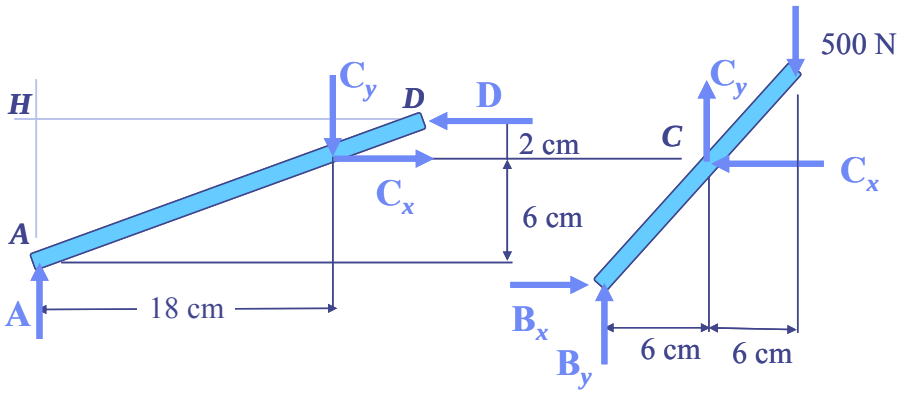
Örnek 9.6



Şekildeki çerçeve için yatay ve dikey yüzeylerdeki sürtünmeyi ihmal ederek BCE elemanı üzerindeki B ve C noktalarına etkiyen kuvvetleri hesaplayınız.

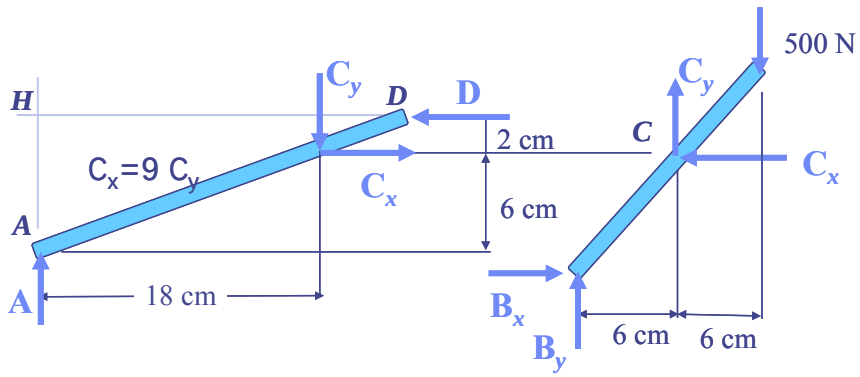
Çözüm :

ACD elemanı için serbest cisim diyagramı:



$\Sigma M_H = 0$: $C_x(2\text{ cm}) - C_y(18\text{ cm}) = 0$ $C_x = 9C_y$

BCE elemanı için serbest cisim diyagramı:

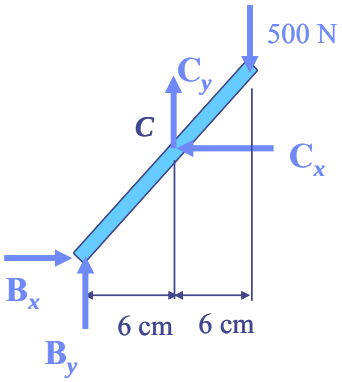


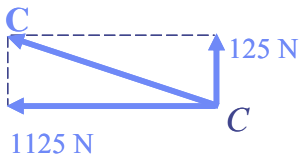
$\Sigma M_B = 0$: $C_x(6\text{ cm}) + C_y(6\text{ cm}) - (500\text{ N})(12\text{ cm}) = 0$

$C_x = 9C_y$ *yerine konulursa*:

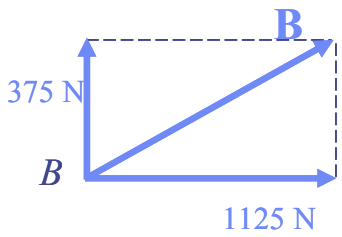
$9C_y(6\text{ cm}) + C_y(6\text{ cm}) - 6000 = 0$

$C_y = +125\text{ N}; \quad C_x = 9C_y = 9(125) = 1125\text{ N}$





C = 1131,9 N 6.3°



B = 1185,85 N 18.4°

$\Sigma F_x = 0$: $B_x - 1125\text{ N} = 0$

$B_x = 1125\text{ N}$

$\Sigma F_y = 0$: $B_y + 125\text{ N} - 500\text{ N} = 0$

$B_y = 375\text{ N}$

BÖLÜM 10

SÜRTÜNME

10.1 GİRİŞ

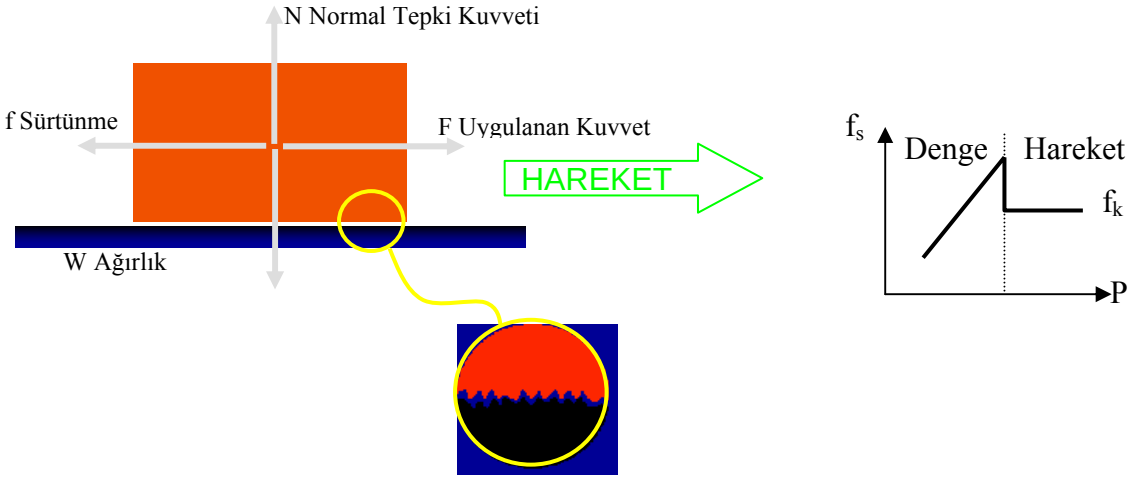
İki yüzey birbirleriyle temasta ise biri ötekine göre hareket etmek isteyince sürtünme kuvveti denen teğetsel kuvvetler ortaya çıkar. Bu kuvvetler şiddetçe sınırlıdır. Yeteri kadar kuvvetin etkimesi halinde harekete mani olamazlar.

İki tür sürtünme vardır.

1. *Kuru Sürtünme* (Cloumb)
2. *Sıvı Sürtünme* (Yağlanlaşmış mekanizmaların incelenmesinde)

Biz kuru sürtünme ile uğraşacağız.

10.2 KURU SÜRTÜNME VE KANUNLARI



Şekil 10.1

Bir cismin diğer bir cisim üzerinde kaymaya başladığı ana kadar ki sürtünmeye ***statik sürtünme*** denir. Bu sürtünmenin tabiatı tam olarak bilinememektedir. Bir cisim diğer bir cisim üzerinde hareket halindeyken söz konusu olan sürtünmeye ***kinetik sürtünme*** denir.

Bazı cisimlerin statik sürtünme katsayıları şöyledir.

Metal ile metal	0,15 – 0,60 arası
Metal ile tahta	0,20 – 0,60 arası
Tahta ile tahta	0,25 – 0,50 arası
Lastik ile beton	0,60 – 0,80 arası
Lastik ile buz	0,05 – 0,20 arası
Çelik ile buz	0,03
Lastik ile asfalt	0,80

NOT: Kinetik sürtünme katsayıları statik sürtünme katsayısının yaklaşık 0,75 ine eşittir.

10.3 SÜRTÜNME KANUNLARI

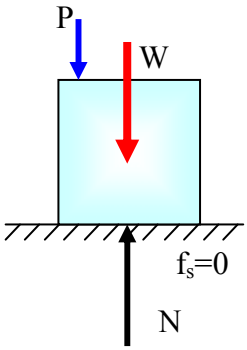
1. Sürtünme katsayısı normal kuvvetten bağımsızdır. Fakat sürtünme kuvveti normal kuvvetle doğru orantılıdır.

$$\mathbf{f = \mu N}$$

2. Sürtünme katsayıları değerleri sadece yüzeylerin tabiatına bağlıdır. Dayanma, yüzeyinin biçim ve büyüklüğünden bağımsızdır.
3. Kinetik sürtünme katsayısı statik sürtünme katsayısından küçüktür.
4. Küçük hızlarda sürtünme hıza bağlı değildir. Fakat yüksek hızlarda sürtünme azalır.

Bir cisim yatay bir yüzeyle temasta ise dört farklı durum ortaya çıkar. Bunlar;

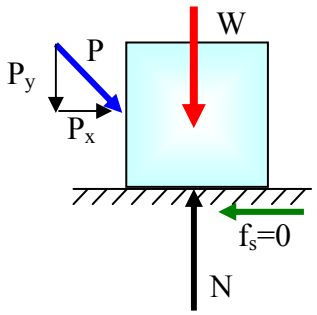
1. Cisme etkiyen kuvvet onu temas yüzeyi boyunca hareket etmeye zorlamaz. (f_s) sürtünme kuvveti yoktur.



Sürtünme Yok. ($P_x = 0$)

N=P+W

2. Etkiyen kuvvetler, cismi temas yüzeyi boyunca harekete zorlar fakat hareket ettirecek kadar büyük değildir. Meydana gelen sürtünme kuvveti statik dengeden çözülebilir.
$f_s = \mu_s N$ kullanılamaz.



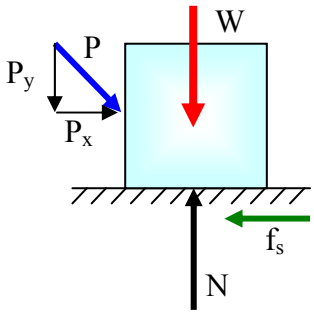
Hareket Yok. $P_x < f_s$

$N = P_y + W$

$F_s = P_x$

$F < \mu_s.N$

3.



Hareket Başlangıcı.($f_s = P_x$)

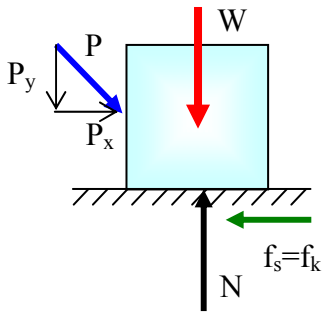
$N = P_y + W$

$f_m = P_x$

$F_m = \mu.N$

Hareketin başlangıcı etkiyen dış kuvvetler sürtünme kuvvetinin max. (f_s) değerine ulaşmıştır. Sürtünme kuvveti N normal kuvvetiyle beraber diğer kuvvetleri dengelemektedir. $f_m = \mu_s.N$ kullanılabilir. f_m , her zaman hareketin ters yönündedir.

4.



Hareket. ($P_x > F_m$)

$N = P_y + W$

$F_k = \mu_k.N$

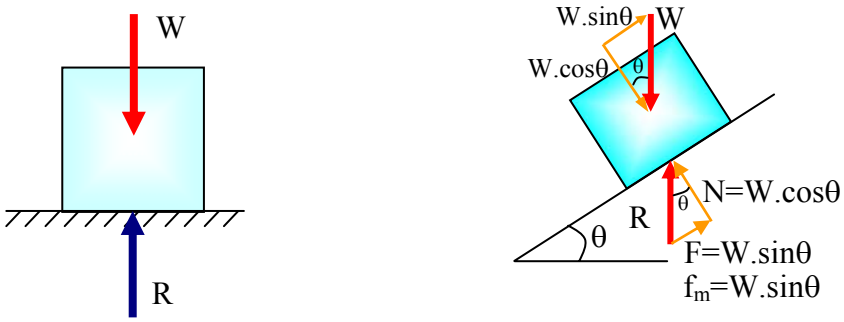
Cisme etkiyen kuvvetler tesirinde kaymaktadır. Artık denge denklemi uygulanmaz.

$f_s = F_k$ F_k: Kinetik sürtünme kuvveti

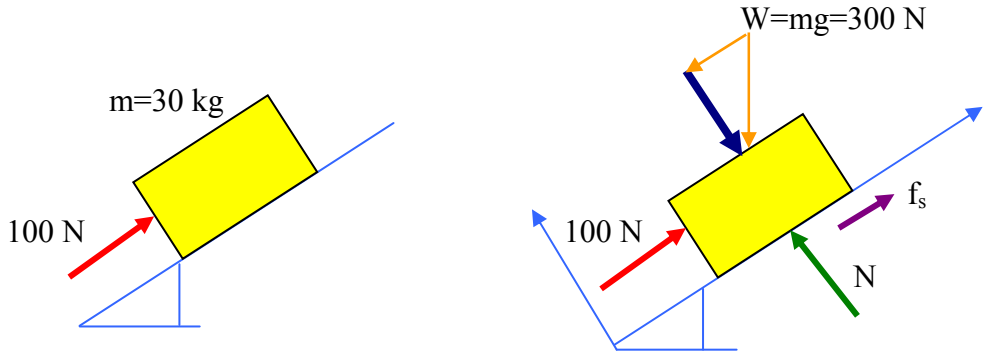
$f_k = \mu_k.N$

10.4 SÜRTÜNME KATSAYILARI VE SÜRTÜNME AÇILARI

a) Hareket yok b) Hareket başlangıcı



Örnek 10.1 100 N'luk bir kuvvet**,** şekilde görüldüğü gibi eğik bir düzlem üzerine yerleştirilmiş 30 kg' lık bir blok üzerine etkimektedir. Blok ve düzlem arasındaki sürtünme katsayıları $\mu = 0{,}25$ $\mu_k = 0{,}20$ dir. Bloğun dengede olup olmadığını ve sürtünme kuvvetinin değerini bulunuz.



Çözüm :

$\Sigma F_x = 0 \qquad 100 - \frac{3}{5}.300 + F_s = 0$

$F_s = 80$ N

$\Sigma F_y = 0 \qquad N - \frac{4}{5}.300 = 0$

N = 240 N

$F_{max} = \mu_s.N = 0{,}25*240 = 60$ N

80 > 60 denge sağlanmaz blok kayar ...

Sürtünme kuvvetinin gerçek değeri

$F_g = F_k = \mu_k.N = 0.20*240 = 48$ N

Bloğa etki eden kuvvetler dengede olmadığından blok sola doğru kayar.

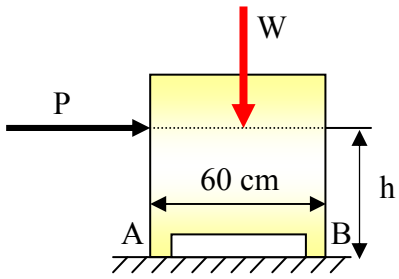
$\Sigma F_x = 0 \qquad \frac{3}{5}.300 - 100 - 48 = 32$ N

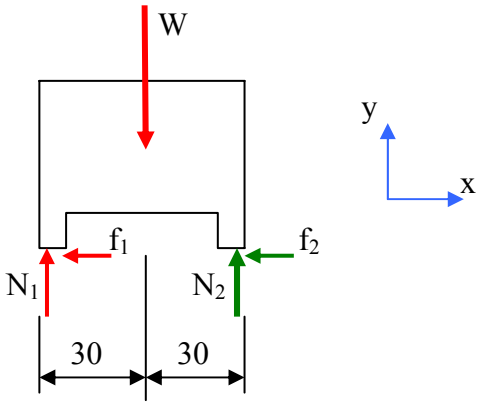
Örnek 10.2 Şekilde gösterilen m=120 kg kütlesindeki dolabın ayakları ile döşeme arasındaki sürtünme katsayısı 0,25 tir.

a-) Dolabı sağ tarafa doğru harekete başlatacak P kuvvetini bulunuz.

b-) Dolabın devrilmemesi için (h) yüksekliği en fazla ne olabilir? Hesaplayınız.

a-)





$\Sigma F_x = 0 \quad P - F_1 - F_2 = 0$

$P = F_1 + F_2$

$N = N_1 + N_2$

$\Sigma F_y = 0 \quad N_1 + N_2 - W = 0$

$F_1 = \mu.N_1$

$F_2 = \mu .N_2$

$P = \mu.N = \mu.W$

$P = 0{,}25*1200 = 300$ N

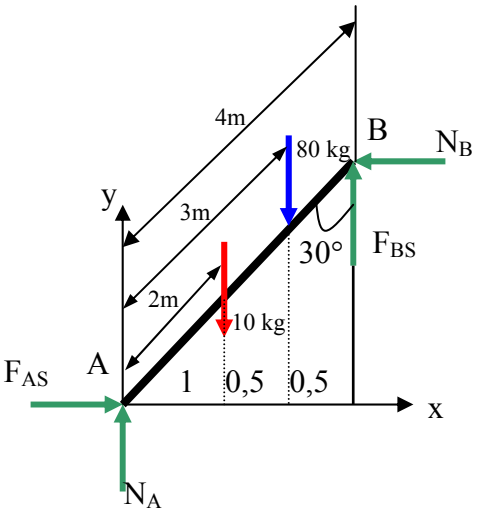
b-) Devrilme B noktası etrafında dolabın dönmesi ile meydana gelebilir. $\Sigma M_B = 0$ olmalı.

$\Sigma M_B = 0$ $\quad 30W - P.h = 0$

$30.1200 - 300.h = 0$

$h = 120$ cm

Örnek 10.3 4m uzunluğunda ve 10 kg kütlesinde bir merdiven şekilde görüldüğü gibi bir düşey duvara dayanmaktadır. 80 kg kütlesinde bir adam A alt ucundan 3m uzaklığındaki bir noktaya geldiğinde merdiven kaymaya başlamaktadır. Merdivenle duvar arasındaki $\mu_s = 0{,}20$ olduğuna göre zeminle merdiven arasındaki $\mu_s = ?$



$F_{BS} = \mu_{S1}.N_B$

$F_{AS} = \mu_{S2}.N_A$

$\Sigma M_A = 0$

$2*0{,}20.N_B + 3{,}46.N_B - 1*100 - 1{,}5.800 = 0$

$N_B = 336{,}78$ N

$\Sigma F_y = 0$

$N_A + 0{,}20*N_B - 10 - 80 = 0$

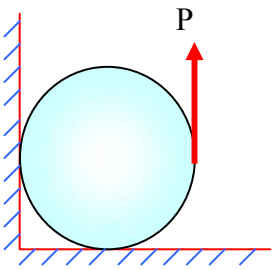
$N_A = 832{,}6$ N

$\Sigma Fx = 0$

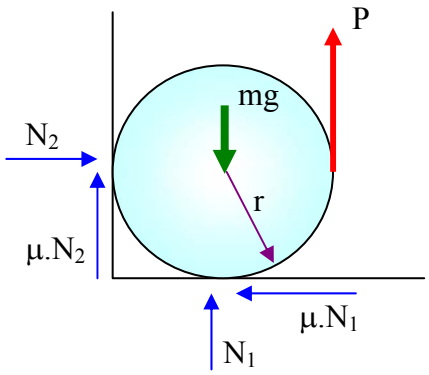
$\mu_{s2}.N_A - N_B = 0$

$\mu_{s2} = 0{,}40$

Örnek 10.4 Kütlesi m olan silindiri sürtünmeye karşı döndürmeye başlatacak P kuvvetini tayin ediniz. Sürtünme katsayısı μ dür.



Çözüm



$\Sigma M_o = 0$

$\mu.N_1.r + \mu.N_2.r = P.r$

$P = \mu.(N_1 + N_2)$

$\Sigma F_x = 0$

$N_2 - \mu.N_1 = 0$

$\Sigma F_y = 0$

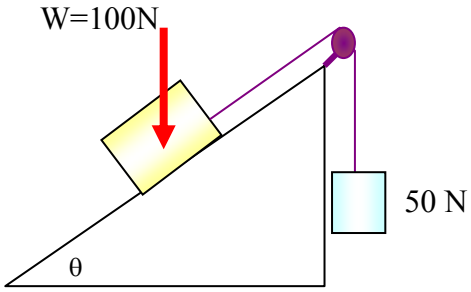
$N_1 + \mu.N_2 + P - m.g = 0$

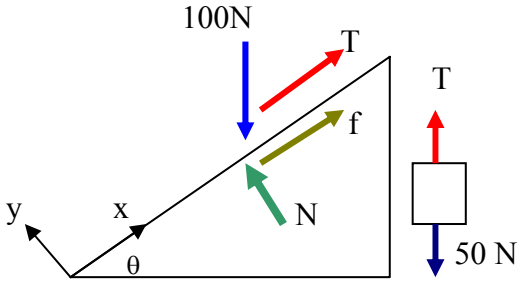
$P = \mu.N_1(1 + \mu)$

$N_1 + \mu^2.N_1 + P = m.g$

$$P = \left(\frac{\mu.(1+\mu)}{1+\mu+2\mu} \right).m.g$$

Örnek 10.5 Şekilde verilen sistemde cisim ile eğik düzlem arasında sürtünme katsayısı 0,2 dir. Eğik düzlem açısı θ nın sistemin dengesinin korunması kaydıyla alabileceği değerleri hesaplayınız.





Sistemin aşağı doğru hareketinde θ

Sistemin yukarı doğru hareketinde θ

$\Sigma F_x = 0$

$T + f - W.\sin\theta = 0$ $\quad T + f = 100.\sin\theta$ (1)

$\Sigma F_y = 0$

$-W.\cos\theta + N = 0$ $\quad N = 100.\cos\theta$ (2)

$f = \mu.N = 0{,}2.N = 0{,}20.100.\cos\theta$ (3)

$T = 50$ N (4)

(1) de yerine koyarsak $\quad 50 + 20.\cos\theta = 100.\sin\theta$

$\theta \leq 41°$

Şimdi de 100 N' luk yükün yukarı çekildiğini düşünelim.

$50 - 20.\cos\theta = 100.\sin\theta$

$\theta \geq 18°$

$18 \leq \theta \leq 41$