Oran Testi

Herhangi bir oranın belli bir değere eşit olmadığını test etmek için kullanılır.

Örnek:

Yüz defa atılan bir para 34 defa yazı gelmiştir. Paranın yazı gelme olasılığının % 50 olduğu bilindiğine göre bu oranın % 50'den küçük olup olmadığını test ediniz ve sonucu yorumlayınız.

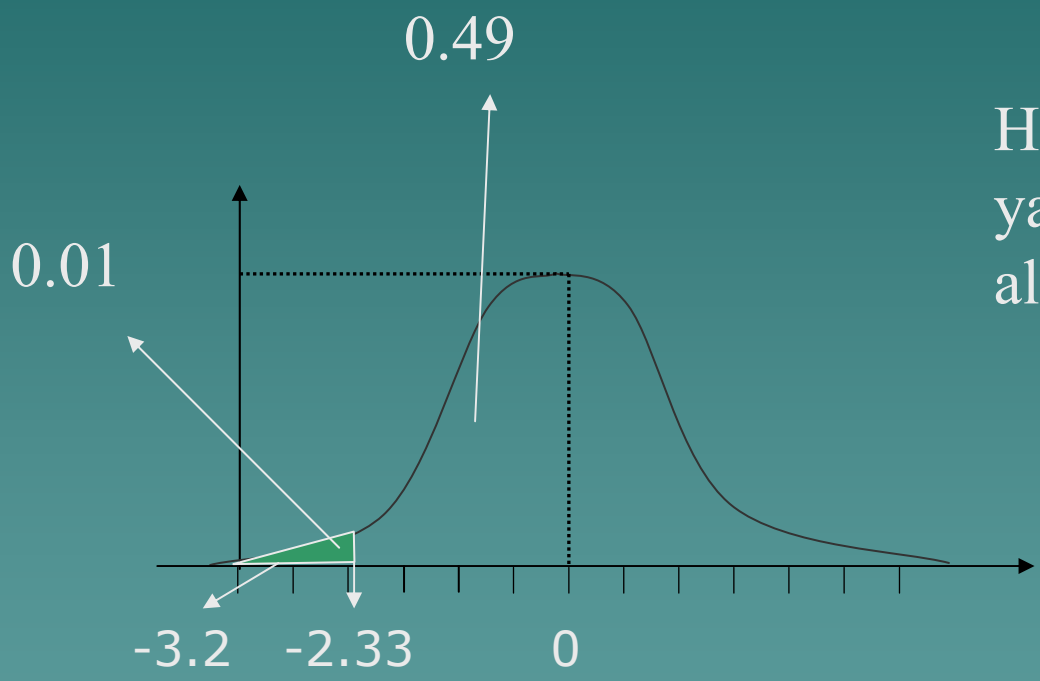
Çözüm:

Ho: p=0.5
Hı : p<0.5
α=0.01

bilinenler

$$p = 0.5$$
$$q = 1 - p = 1 - 0.5 = 0.5$$
$$\hat{p} = 0.34$$

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.34 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 * 0.5}{100}}} = \frac{-0.16}{0.05} = -3.2$$



H_0 hipotezi RED edilir. Parada yazı gelme oranı % 50'nin altındadır, para hilelidir.

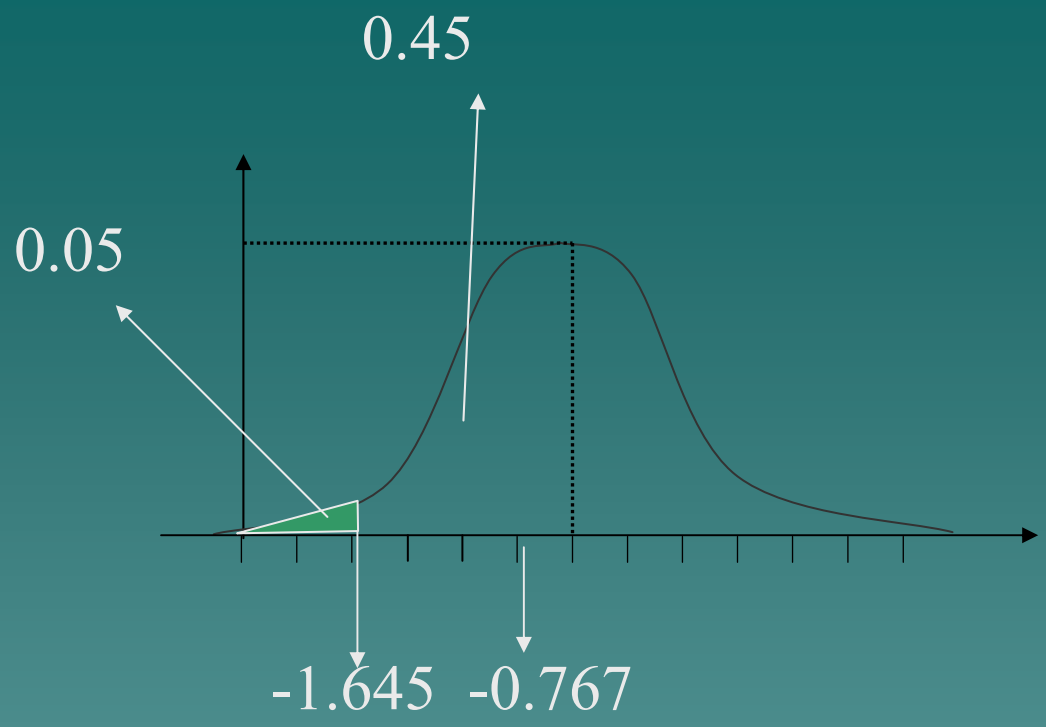
Örnek: bir fabrika tarafından üretilen malların % 15 inin kusurlu olduğu bilinmektedir. Bu mallar arasından rasgele seçilen 120 parçadan 15 inin kusurlu olduğu saptanmıştır. Buna göre %5 önem seviyesinde fabrikanın ürettiği malların %15 in altında kusurlu olduğunu söylenebilir mi? Test ediniz ve yorumlayınız?

Çözüm: H_0:p=0.15

H_1:p<0.15

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.125 - 0.15}{\sqrt{\frac{0.15 * 0.85}{120}}} = \frac{-0.025}{0.0326} = -0.767$$

$$\hat{p} = \frac{n_A}{N} = \frac{15}{120} = 0.125$$



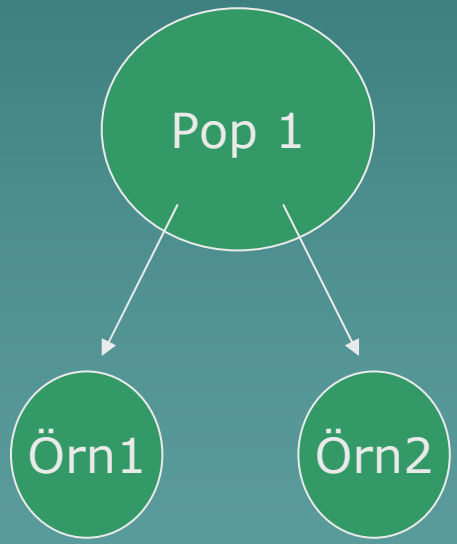
H_0 hipotezi RED edilmez. Fabrikaların iddia ettiği gibi mallardaki kusurluların oranı % 15'den farklı değildir.

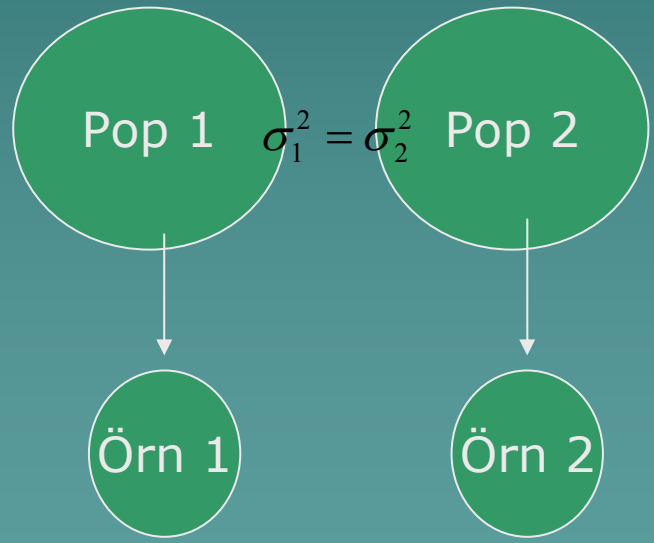
Örnek: Bir ayçiçeği çeşidinden tohumların çimlenme gücünün % 70 olduğu bildirilmektedir. Bir araştırıcı bu tohumlardan 200 tanesiyle yapmış olduğu denemede 165 tanesinin çimlendiğini gözlemiştir. Buna göre bu tohumların çimlenme gücünün % 70 olup olmadığını test ediniz ve sonucu yorumlayınız.

Örnek: Bir ilde yapılacak belediye başkanı seçimlerinde A şahsının kazanma olasılığının % 30 olduğu iddia edilmektedir. Bu iddiayı test için 400 kişi ile yapılan ankette 185 kişinin A şahsını desteklediği görülmüştür. Buna göre yukarıdaki iddianın doğru olup olmadığını test ediniz ve sonucu yorumlayınız.

İki grubun mukayesesi yöntemi

Bu yöntemde ortalamaları karşılaştırılacak iki örneğin ya bir populasyondan birbirinden bağımsız olarak rastgele alınan iki örnek yada varyansları aynı olan iki farklı populasyondan ayrı ayrı alınmış iki örnek olduğu varsayılır.





Hipotezler;

$$Ho: \mu_A - \mu_B = 0 \Rightarrow \mu_A = \mu_B$$
$$Hı: \mu_A - \mu_B \neq 0 \Rightarrow \mu_A \neq \mu_B$$

Çift yönlü

$$Ho: \mu_A - \mu_B = 0 \Rightarrow \mu_A = \mu_B$$
$$Hı: \mu_A - \mu_B < 0 \Rightarrow \mu_A < \mu_B$$

Tek yönlü

$$Ho: \mu_A - \mu_B = 0 \Rightarrow \mu_A = \mu_B$$
$$Hı: \mu_A - \mu_B > 0 \Rightarrow \mu_A > \mu_B$$

Tek yönlü

Kullanılacak test istatistiğinin seçimi için populasyon varyansına ve örnek genişliğine bakılır.

Eğer populasyon varyansı σ^2 biliniyorsa;

$$z = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}$$

Eğer populasyon varyansı σ^2 bilinmiyorsa;

$n_A \geq 30$ ve $n_B \geq 30$

$$Z = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{S_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}} \sim Z_\alpha$$

$n_A < 30$ ve $n_B < 30$

$$t = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{S_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}} \sim t_{n_A + n_B - 2, \alpha}$$

Burada

$$S_{\bar{x}_A - \bar{x}_B} = \sqrt{S_{ort}^2 \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)} \quad , \qquad S_{ort}^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2}$$

Örnek: İki farklı gübrenin domates verimine etkisi araştırılıyor. Buna göre iki gübre arasında verime etkileri bakımından fark var mıdır? Test ediniz ve sonucu yorumlayınız.

Amonyum Sülfat (A)	8	12	15	9	12	10	$\sum x_A = 66$	$\bar{x}_A = 11$	$S_A^2 = 6.4$
Üre (B)	8	10	7	6	9		$\sum x_B = 40$	$\bar{x}_B = 8$	$S_B^2 = 2.5$

Çözüm:

$$Ho: \mu_A - \mu_B = 0 \Rightarrow \mu_A = \mu_B$$

$$Hı: \mu_A - \mu_B \neq 0 \Rightarrow \mu_A \neq \mu_B$$

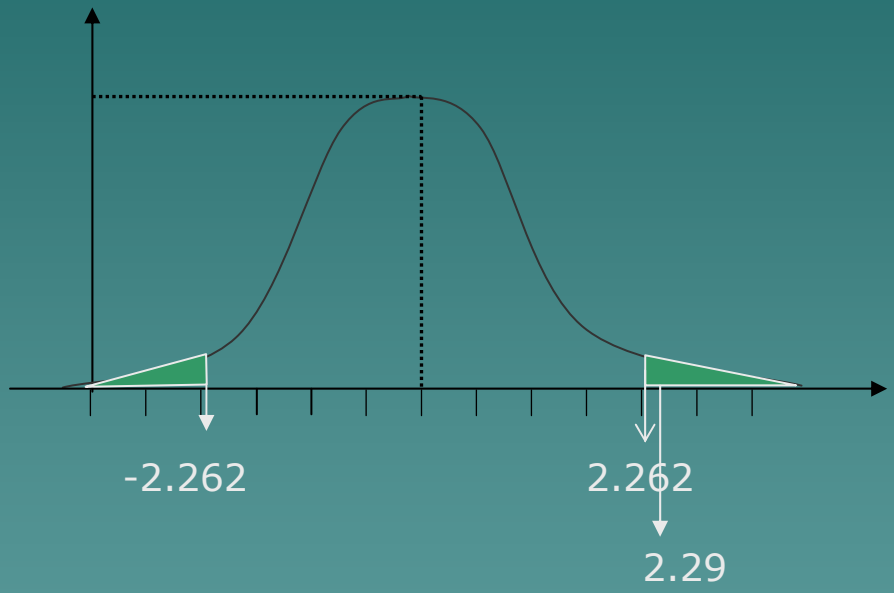
Populasyon varyansı σ^2 bilinmiyor ve $n_A<30$ ve $n_B<30$ olduğundan,

$$t = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{S_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}} = \frac{(11-8)-0}{\sqrt{S_{ort}^2\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = \frac{3}{\sqrt{4.67\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)}} = \frac{3}{1.31} = 2.29$$

$$S_{ort}^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{(6-1)*6.4 + (5-1)*2.5}{6+5-2} = \frac{42}{9} = 4.67$$

α=0.05/2=0.025 alınırsa

$$t_{n_A+n_B-2,\alpha/2} = t_{6+5-2,0.05/2} = t_{9,0.025} = 2.262$$



H_0 hipotezi RED edilir. İki gübre arasında domates verimine etkileri bakımından istatistik olarak önemli fark vardır (P<0.05).

Örnek: 4 ve 5 yaşlı ağaçların meyve verimi ile ilgili olarak aşağıdaki bilgiler mevcuttur. Buna göre 4 ve 5 yaşlı ağaçlar arasında meyve verimi bakımından fark var mıdır? Test ediniz ve sonucu yorumlayınız.

	n	$\bar{x} \pm S_{\bar{x}}$
4 yaş	4	3.85±0.646
5 yaş	5	4.15±0.842

Örnek: Tütün yapraklarına uygulanan iki ayrı ilacın yapraklarda oluşturduğu leke miktarları aşağıdaki gibidir. Buna göre iki ilacın birbirlerinden farklı olup olmadığını test ediniz ve sonucu yorumlayınız.

A	19	12	14	13		
B	13	11	10	12	14	12

Eş-Yapma Yöntemi

Deneme üniteleri çifti tesadüfi olmaktan ziyade doğal olarak eş durumunda ise uygulanacak yöntem eşli karşılaştırma yöntemidir. Bu yöntem deneysel hatayı küçültmek için uygulanır.

Eş yapma yönteminde aynı birey üzerinden değişik şartlarda alınan ölçümler veya doğal olarak eş durumunda olan bireylerden elde edilen iki değer karşılaştırılır.

Örnek:

-Bir öğrencinin sınavdan önceki ve sınavdan sonraki nabzının ölçülmesi

-Tek yumurta ikizlerinin farklı muamelelere tabii tutulması

Gözlem no	A	B	$d_i=(A-B)$
1	x_1	y_1	$d_1=x_1-y_1$
2	x_2	y_2	$d_2=x_2-y_2$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n	$d_n=x_n-y_n$
Toplam	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum d_i$

Hipotezler

$$Ho:\delta=0 \quad H_1:\delta\neq 0$$ Çift yönlü

$$Ho:\delta=0 \quad H_1:\delta<0$$ Tek yönlü

$$Ho:\delta=0 \quad H_1:\delta>0$$ Tek yönlü

$$t=\frac{\bar{d}-\delta}{S_{\bar{d}}}\sim t_{n-1,\alpha} \quad , \quad \bar{d}=\frac{\sum d_i}{n} \quad , \quad S_{\bar{d}}=\sqrt{S_d^2}$$

Örnek: 10 adet ikiz kuzu besi denemesine alınıyor. İkizlerden birisine A rasyonu diğerine ise A rasyonu+A vit. Uygulanıyor. Her iki gruptaki kuzuların canlı ağırlık artışı tablodaki gibi bulunuyor. Buna göre canlı ağırlık kazandırma açısından her iki yem arasında farklılık olup olmadığını test ediniz? Sonuçlarını yorumlayınız?

A (A Rasy.)	B (A Ras+Avit)	d=(A-B)
12.9	12.5	0.4
13.5	13.4	0.1
12.4	12.6	-0.2
13.2	13.8	-0.6
9.5	9.8	-0.3
11.4	11.3	0.1
13.3	13.7	-0.4
12.1	12.3	-0.2
11.6	11.5	0.1
14.2	14.6	-0.4

Hipotezler

$$H_0 : \delta = 0$$

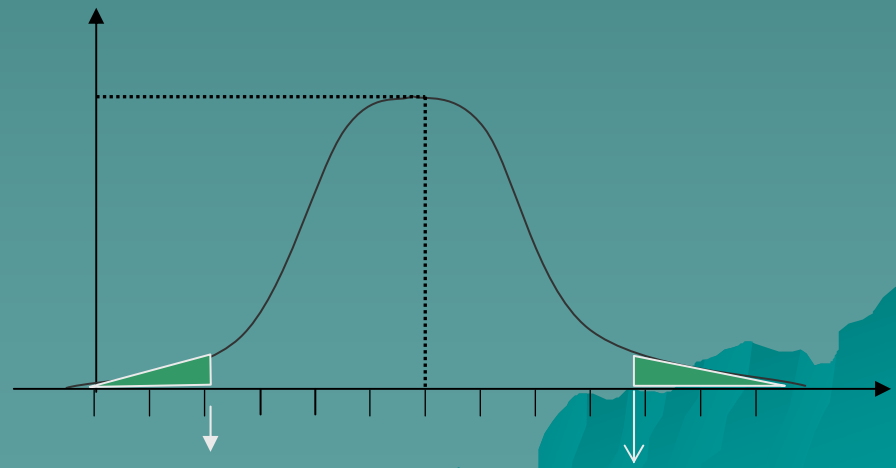
$$H_1 : \delta \neq 0$$

$$\bar{d} = -\frac{1.4}{10} = -0.14$$

$$S_d^2 = \frac{\sum d^2 - \left(\sum d\right)^2 / n}{n-1} = \frac{1.04 - (-1.4)^2 / 10}{9} = 0.094$$

$$t = \frac{\bar{d} - \delta}{S_{\bar{d}}} = \frac{-0.14 - 0}{\sqrt{\frac{0.094}{10}}} = -1.44$$

H_0 hipotezi RED edilmez. Canlı ağırlık kazandırma açısından her iki yem arasında farklılık yoktur.



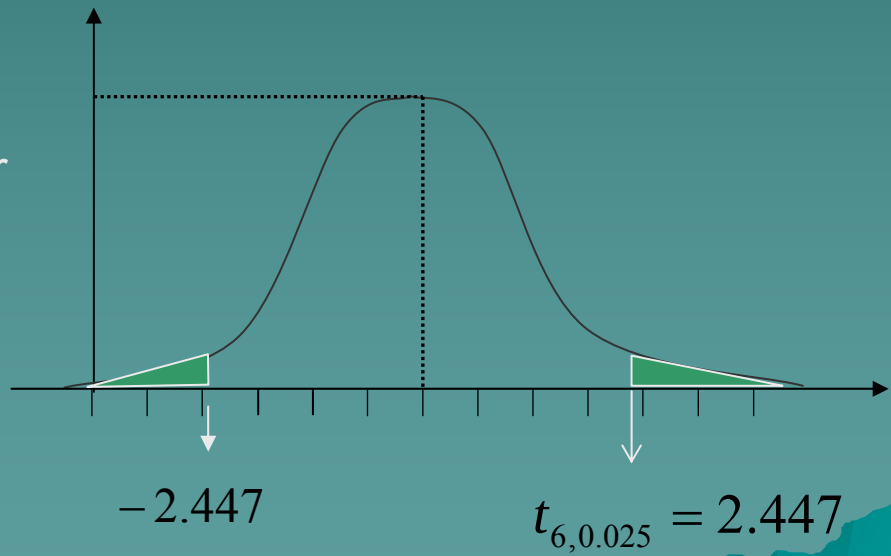
Örnek: İki ayrı mikroorganizma türünün tütün yapraklarında oluşturdukları çürümeleri karşılaştırmak amacıyla yapılan bir denemede tütün yaprakları ortadan iki kısma ayrılmış ve her bir kısma farklı türdeki mikroorganizma aşılanmıştır. Belirli bir süre sonra 7 yaprakta ölçülen mikroorganizma koloni sayısı tablodaki gibi bulunmuştur.

I. Tür	II.Tür	d
61	58	3
59	67	-8
62	61	1
65	56	9
60	60	0
71	70	1
61	68	-7

$$S_d^2 = \frac{\sum d^2 - \left(\sum d\right)^2 / n}{n-1} = 34.14$$

$$t = \frac{\bar{d} - \delta}{S_{\bar{d}}} = \frac{-0.14 - 0}{\sqrt{\frac{34.14}{7}}} = -0.065$$

H_0 RED edilmez. Mikroorganizmalar arasında tütün yapraklarında oluşturdukları çürümeler bakımından fark yoktur.



Kİ KARE TESTİ

- Kalitatif karakterleri analiz etmek için kullanılan bir testtir.
- Ki kare dağılışı Z dağılışından türetilmiş bir dağılıştır. Standart z değerlerinin kareleri ki kare dağılışı gösterir.

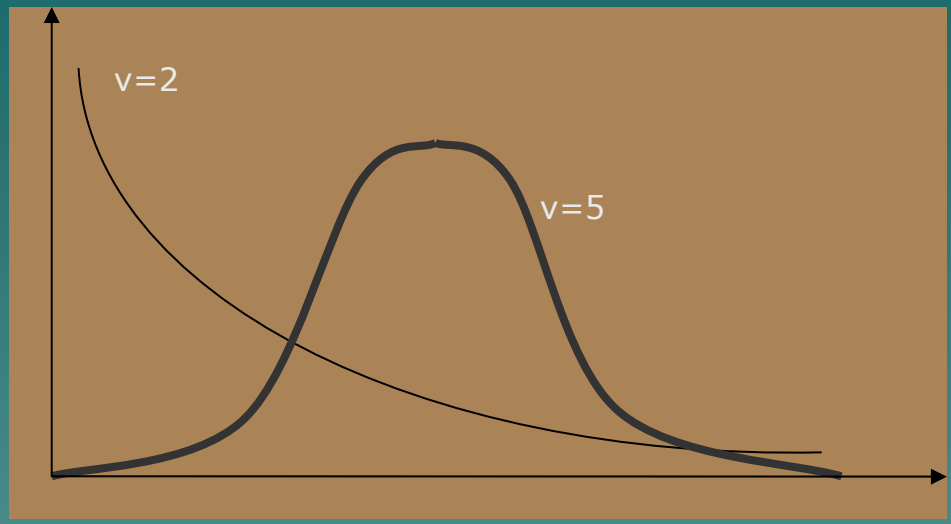
$$z^2 = \left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

1 serbestlik dereceli ki kare dağılışı gösterir

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$$

n tane z^2 dağılışının toplamı n inci serbestlik derecesinde ki kare dağılışını gösteriyor.

Ki Kare Dağılışı



Dağılışın grafiği sağa çarpık bir görüntü oluşturur. Serbestlik derecesi azaldıkça çarpıklık artar. Serbestlik derecesi arttıkça grafik simetrikleşir ve normal dağılışa yakın bir dağılış gösterir. Bu nedenle ki kare testinde hipotez tek yönlü kurulur.

Dağılışın yoğunluk fonksiyonu

$$f(\chi^2) = k(\chi^2)^{1/2(n-2)}.e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Şeklindedir. Burada k: eğrinin altında kalan alanı 1 e eşitlemeye yarayan bir sabit sayıdır.

Ki Kare Test Değerinin Hesaplanması

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{(Gözlenen - Beklenen)^2}{Beklenen}\right] \sim \chi^2_{k-1,\alpha}$$

Şeklindedir. Burada k sınıf sayısını göstermektedir.

Uyum Testi
(Beklenen ile gözlenen frekanslar arasındaki uyum)

Örnek: Bir para denemesinde para 100 kez atılmış ve aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur. Bu sonuçlara göre para hilelimidir? Test ediniz.

	Yazı	Tura	Toplam
Gözlenen	70	30	100
Beklenen	50	50	100

Çözüm:

$H_0: p_y = p_t = 0.5$ para hilesizdir.

$H_1: p_y \neq p_t = 0.5$ para hilelidir.

H_0 hipotezini doğru sayarak beklenen değerler hesaplanırz.

Beklenen değerlerin hesaplanması

$$B_y = p_y * n \qquad B_t = p_t * n$$

$$B_y = 1/2 * 100 = 50 \qquad B_t = 1/2 * 100 = 50$$

$$\chi^2 = \frac{(70-50)^2}{50} + \frac{(30-50)^2}{50} = 16 > 3.841$$

Cetvel değeri $\chi^2_{2-1,0.05} = 3.841$

H_0 hipotezi RED edilir. Para Hilelidir.

Örnek 2: Aşağıda tabloda verilen F_2 lerin mendel 9:3:3:1 açılımına uygunluğunu test ediniz.

F_2	Gözlenen	Beklenen
Yuvarlak basit	126	145.7
Uzun Basit	66	48.6
Yuv. Bileşik	63	48.6
Uzun Bileşik	4	16.1

Beklenen değerlerin hesaplanması

$$B_1 = \frac{9}{16} * 259 = 145.7 \qquad B_3 = \frac{3}{16} * 259 = 48.6$$

$$B_2 = \frac{3}{16} * 259 = 48.6 \qquad B_4 = \frac{1}{16} * 259 = 16.1$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4}\left[\frac{(G_i - B_i)^2}{B_i}\right] = \frac{(126-145.7)^2}{145.7} + \ldots + \frac{(4-16.1)^2}{16.1} = 22.34$$

Cetvel değeri $\chi^2_{4-1,0.05} = 7.81$ Hesap değerinden küçük olduğu için

H_0 hipotezi RED edilir. Bu sonuca göre F_2 lerin açılımları 9:3:3:1 açılımına Uygun değildir.

İki Yönlü Tablolar İçin Uyumluluk Testi

		A					
		A_1	A_2	A_3	. . .	A_c	
B	B_1	g_{11}	g_{12}	g_{13}		g_{1c}	$g_{1.}$
	B_2	g_{21}	g_{22}	g_{23}		g_{2c}	$g_{2.}$
	. . .	. . .	. . .	. . .		. . .	
	B_s	g_{s1}	g_{s2}	g_{s3}		g_{sc}	$g_{s.}$
		$g_{.1}$	$g_{.2}$	$g_{.3}$		$g_{.c}$	$g_{..}$

Hipotezler,

H_0: A ve B karakterleri birbirinden bağımsızdır

H_1: Her iki karakter birbirine bağımlıdır.

Beklenen Değerlerin Hesaplanması

$$B_{ij} = \frac{g_{i.} * g_{.j}}{g..}$$

Ki kare hesap değerinin bulunuşu

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{c}\left[\frac{(G_i - B_i)^2}{B_i}\right] \sim \chi^2_{(s-1)(c-1),\alpha}$$

şeklindedir.

***2 satır ve 2 sütun olduğunda serbestlik derecesi 1 olduğu için dağılış ki kare dağılışına yaklaşmıyor. Bu durumda bir düzeltme katsayısı kullanılır.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{c}\left[\frac{\left(|G_i - B_i| - 0.5\right)^2}{B_i}\right] \sim \chi^2_{(s-1)(c-1),\alpha}$$

Örnek: Bir alanda iki ağaç çeşidinden karınca istilasına uğrama bakımından dağılım aşağıdaki gibi bulunmuştur. Bu gözlemlere göre karınca istilasına uğrama olayı ağaç çeşidine bağlımıdır test ediniz sonuçlarını yorumlayınız.

	Uğramış		Uğramamış		Toplam
A	2	3.8	6	4.2	8
B	17	15.2	15	16.8	32
Toplam	19		21		40

$$B_{11}=\frac{19*8}{40}=3.8;B_{12}=\frac{8*21}{40}=4.2 \quad B_{21}=\frac{32*19}{40}=15.2;B_{22}=\frac{32*21}{40}=16.8$$

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{c}\left[\frac{\left(\left|G_i-B_i\right|-0.5\right)^2}{B_i}\right]=\frac{\left(\left|2-3.8\right|-0.5\right)^2}{3.8}+\ldots+\frac{\left(\left|15-16.8\right|-0.5\right)^2}{16.8}=2.03$$

Cetvel değeri $\chi^2_{1,0.05}=3.84$ H_0 hipotezi RED EDİLMEZ. İki karakter birbirinden bağımsızdır.